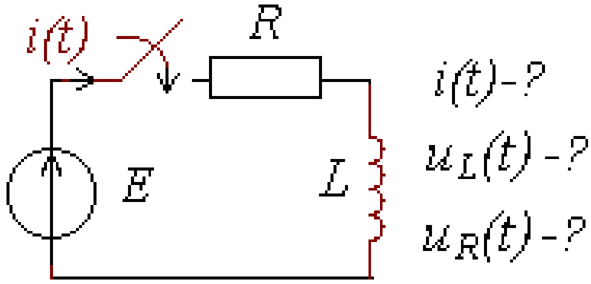
Классический метод анализа переходных процессов в линейных электрических цепях

Классический метод анализа переходных процессов в общем случае основан на составлении и решении системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, описывающих схему с ***n*** накопителями энергии после коммутации.

Рассмотрим несколько примеров анализа переходных процессов классическим методом в простейших цепях.

Включение RL – цепи под постоянное напряжение



1. Определяем начальные условия при *t = 0* используя 1-ый закон коммутации

$$i(0) = 0$$

2.Составляем дифференциальное уравнение после коммутации для данной цепи.

По второму закону Кирхгофа можно записать

$$u_R + u_L = E$$

так как

$$u_R = Ri \qquad \text{и} \qquad u_L = L\frac{di}{dt}$$

то можно записать

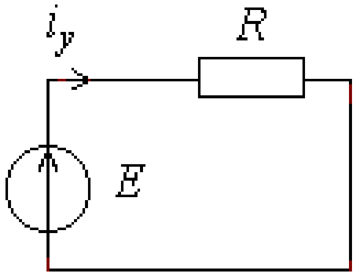
$$L\frac{di}{dt} + Ri = E \qquad (1)$$

Мы получили неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами.

3. Решение данного уравнения находим как сумму установившейся i_y и свободной $i_{св}(t)$ составляющих

$$i(t) = i_У + i_{СВ}(t) \qquad (2)$$

Установившийся режим в цепи после коммутации (при $t = \infty$)есть частное решение уравнения 1



$i_У = E / R$ (3)

Свободная составляющая есть общее решение однородного уравнения соответствующего уравнению (1),

$$L\frac{di_{CB}}{dt} + Ri_{CB} = 0 \qquad (4)$$

решение, которого ищем в виде

$$i_{CB}(t) = Ae^{pt}$$

постоянная *р* определяется из характеристического уравнения, соответствующего (4)

$$Lp + R = 0$$

откуда *p* = -*R/L*.

Таким образом

$$i_{CB}(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} \qquad (5)$$

С учетом формул (2, 3 и 5) получим общее решение уравнения (1)

$$i(t) = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t} \qquad (6)$$

постоянная *A* определяется из начального условия $i(0) = 0$

$i(0) = 0 = \dfrac{E}{R} + A$, откуда *A* = –*E/R*

Следовательно, искомый ток с учетом (6) равен

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

Обозначим множитель в показателе степени

L/R = τ

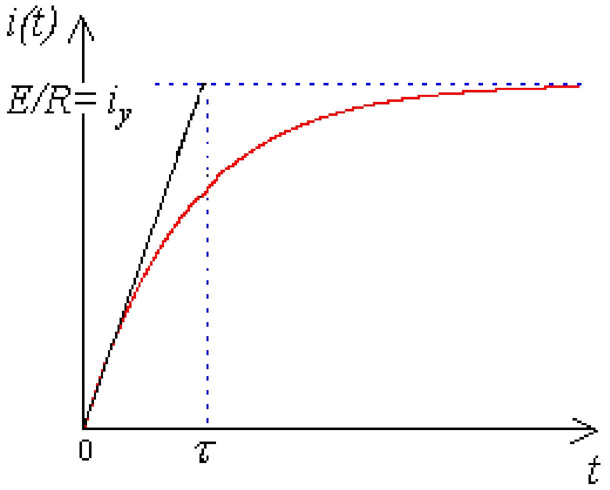
С учетом этого можно записать

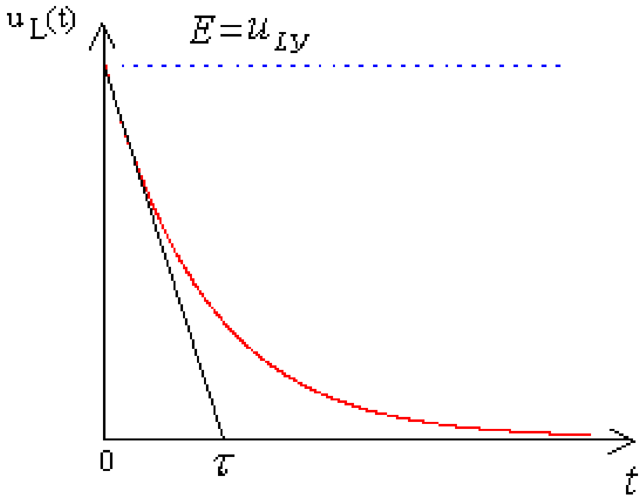
$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Напряжения на других участках цепи:

$$u_R(t) = Ri(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad u_L(t) = L\frac{di}{dt} = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

Графики переходных величин - тока и напряжения на индуктивности приведены на рисунках.





На графиках показаны также установившиеся значения переходных величин, и касательные, проведенные к графикам в момент времени $t = 0$.

Величина τ, именуемая **постоянной времени цепи** равна времени, за которое сила тока или напряжение могли бы достичь своего установившегося значения, если бы скорости изменения этих величин di/dt или du_L/dt оставались неизменными и равными начальным значениям при $t = 0$.

Докажем это утверждение. Умножим начальную скорость $du_L(0)/dt$ на постоянную времени τ, и найдем, что спустя время τ после замыкания напряжение u_Lдостигнет своего значения

$$-\frac{du_L(0)}{dt}\tau = -\frac{d(Ee^{-\frac{t}{\tau}})}{dt}\tau = E$$

Знак «-» взят с учетом того, что угловой коэффициент касательной к графику $u_L = u_L(t)$ имеет отрицательное значение.

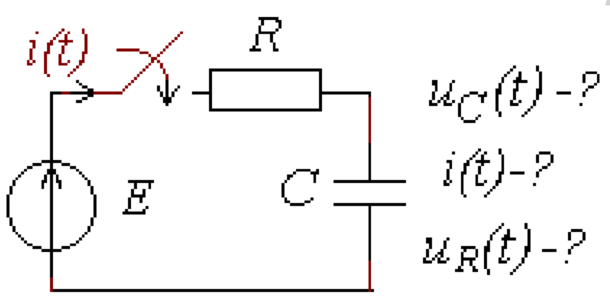
Таким образом, по графикам (осциллограммам) переходной величины можно определять постоянную времени цепи.

За время порядка 3τ - 5τ переходной процесс можно считать завершённым, так как переходная функция отличается не более чем на 10% от своего **установившегося значения**

$$\frac{u_L(3\tau)}{u_L 0)} \cdot 100\% = - = \frac{Ee^{-3}}{Ee^{0}} \cdot 100\% = \frac{1}{e^{3}} \approx 5\%$$

Таким образом, постоянная времени цепи τ характеризует время переходного процесса

Включение источника постоянного напряжения в RC – цепи (Зарядка конденсатора)



1. Определяем начальные условия при *t = 0* используя 2-ой закон коммутации

$$u_C(0) = 0$$

2.Составляем дифференциальное уравнение после коммутации для данной цепи.

По второму закону Кирхгофа можно записать

$$u_R + u_C = E$$

так как

$$i = C\frac{du_C}{dt}$$ то $$u_R = RC\frac{du_C}{dt}$$

то можно записать

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

Решение данного уравнения находим как сумму установившейся i_y и свободной $i_{св}(t)$ составляющих

$$u_C(t) = u_{Cy} + u_{CCB}(t)$$

Установившийся режим в цепи после коммутации (при $t = \infty$)есть частное решение дифференциального уравнения

$$u_{Cy} = E$$

Свободная составляющая есть общее решение однородного уравнения

$$RC\frac{du_{C\,CB}}{dt}+u_{C\,CB}=0$$

решение, которого ищем в виде

$$u_{C\,CB}(t)=Ae^{pt}$$

где $p = -1/RC$ – корень характеристического уравнения

$$RCp+1=0$$

Таким образом

$$u_{C\,CB}(t)=Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

общее решение

$$u_C\ (t)=E+Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

постоянная A определяется из начального условия $u_C(0)=0$

$u_C(0)=0=E+A$, откуда $A = -E$

Следовательно, искомое напряжение равно

$$u_C(t)=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$

Обозначим множитель в показателе степени

$R\,C=\tau$

С учетом этого можно записать

$$u_C(t)=E(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$

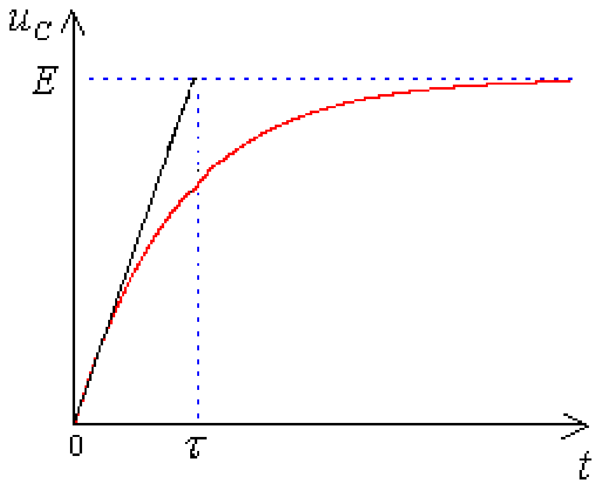
Сила тока

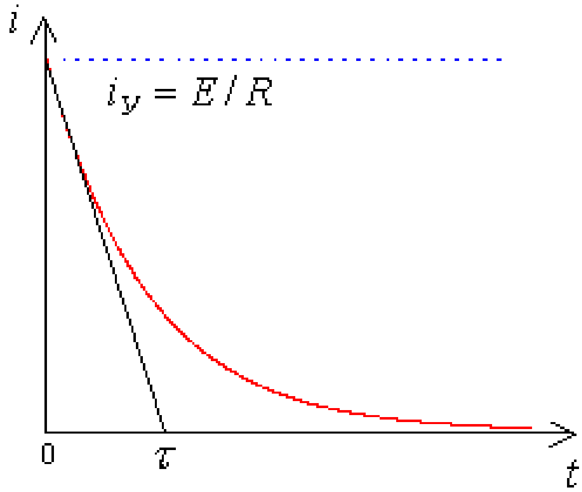
$$i=C\frac{du_C}{dt}=\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Напряжение на сопротивлении

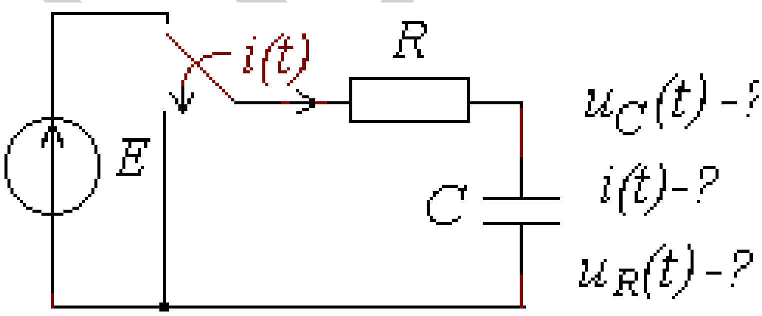
$$u_R(t)=Ri=Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

Графики переходных величин - тока и напряжения на емкостном элементе приведены на рисунках.





Отключение источника постоянного напряжения в RC – цепи (разрядка конденсатора)



2. Определяем начальные условия при *t = 0* используя 2-ой закон коммутации

$$u_C(0) = E$$

2.Составляем дифференциальное уравнение после коммутации для данной цепи.

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

3. Общее решение данного уравнения

$$u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

где $\tau = RC$

постоянная A определяется из начального условия

$u_C(0) = E$, следовательно $A = E$

Искомое напряжение

$$u_C(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

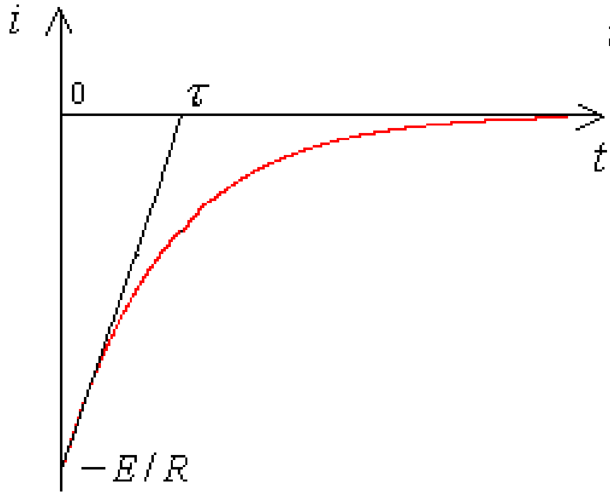
Сила тока

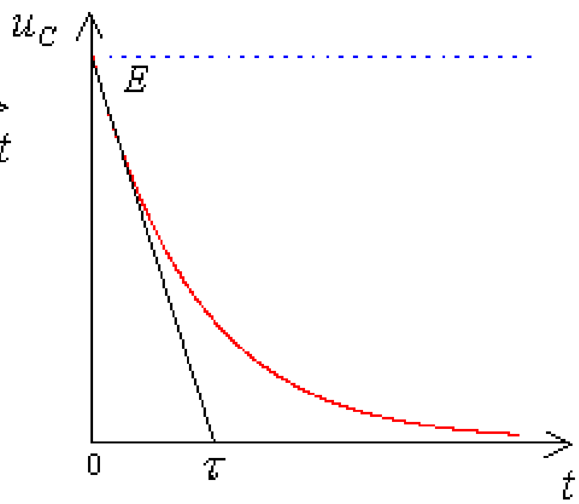
$$i = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Напряжение на сопротивлении

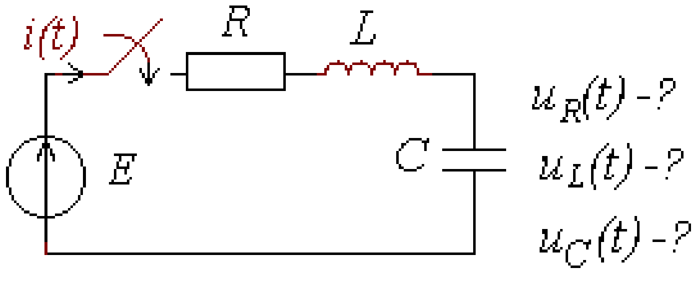
$$u_R(t) = Ri = -Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

Графики переходных величин - тока и напряжения на емкостном элементе приведены на рисунках.





Включение последовательной RLC – цепи под постоянное напряжение



1. Определяем начальные условия при *t = 0*

$$i(0) = 0 \; u_C(0) = 0 \qquad (2.2.38)$$

2.Составляем дифференциальное уравнение после коммутации для данной цепи.

По второму закону Кирхгофа можно записать

$$u_R + u_L + u_C = E$$

или с учётом формул

$$u_L = L\frac{di}{dt} = LC\frac{d^2u_C}{dt^2} \quad \text{и} \quad u_R = RC\frac{du_C}{dt} \qquad \text{или}$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

Мы получили неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка.

3. Общее решение данного однородного уравнения ищем в виде

$$u_C(t) = u_{CУ} + A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t}$$

где

$u_{CУ} = E$ (конденсатор заряжен),

а постоянные p_1и p_2определяются из характеристического уравнения

$$LC \cdot p^2 + RC \cdot p + 1 = 0$$

его решение:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Характер переходного процесса зависит от корней характеристического уравнения (от соотношения $\frac{R^2}{4L^2}$ и $\frac{1}{LC}$ или от соотношения $\frac{R}{2L}$ и $\frac{1}{\sqrt{LC}}$).

А) $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – корни вещественные, отрицательные разные:

В цепи имеет место **апериодический ПП**. Используя начальные условия, определим постоянные интегрирования

$$u_C(0) = E + A_1 + A_2 = 0$$

Возьмем производную от выражения (2.2.41) при $t = 0$.

$$C\frac{du_C(0)}{dt} = i(0) = A_1p_1 + A_2p_2 = 0$$

Из данной системы найдем

$$A_1 = E\frac{p_2}{p_1 - p_2} \quad \text{и} \quad A_2 = -E\frac{p_1}{p_1 - p_2}$$

После подстановок получим выражение для переходного напряжения ёмкости:

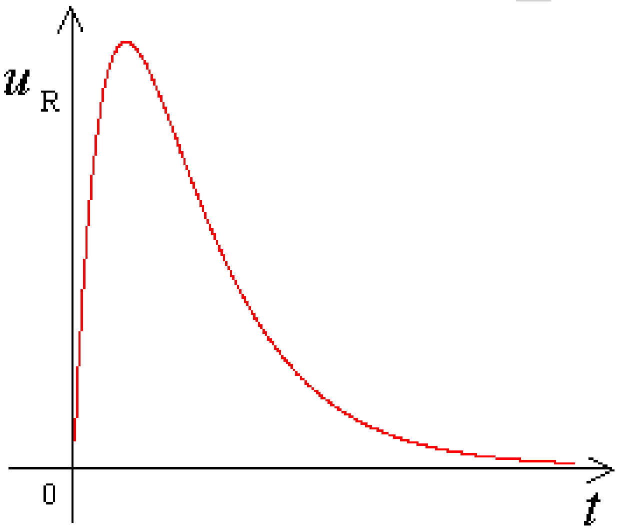
$$u_C(t) = E + \frac{E}{(p_1 - p_2)}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})$$

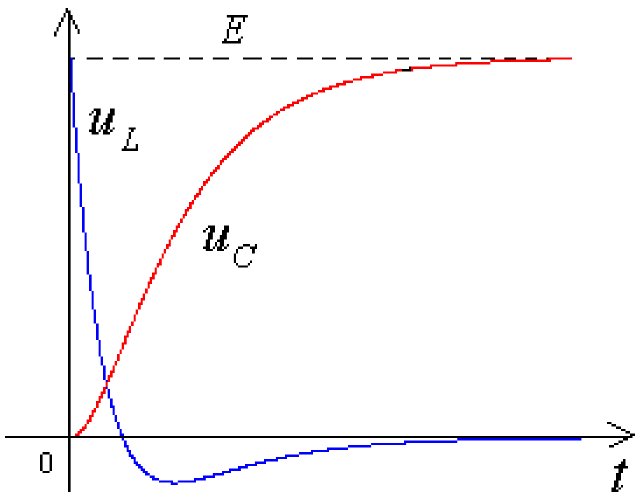
а напряжение на индуктивном и резистивном элементах:

$$u_R = RC\frac{du_C}{dt} = \frac{E \cdot R}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

$$u_L(t) = LC\frac{d^2 u_C}{dt^2} = \frac{E}{p_1 - p_2}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})$$

На рисунках приведены графики переходных величин





Б) $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – корни комплексные сопряженные

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = -\alpha \pm j\omega_C$$

где $\alpha = \dfrac{R}{2L}$ - коэффициент затухания **ПП**, $\omega_C = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ - угловая частота свободных (собственных) колебаний реального контура, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ - собственная частота идеального контура *(R = 0)*.

В цепи имеет место **колебательный ПП**, вследствие периодического преобразования энергии электрического поля емкостного элемента в энергию магнитного поля индуктивного элемента и наоборот.

С учётом формулы

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_C$$

и соотношения Эйлера

$$e^{j\varphi_C} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

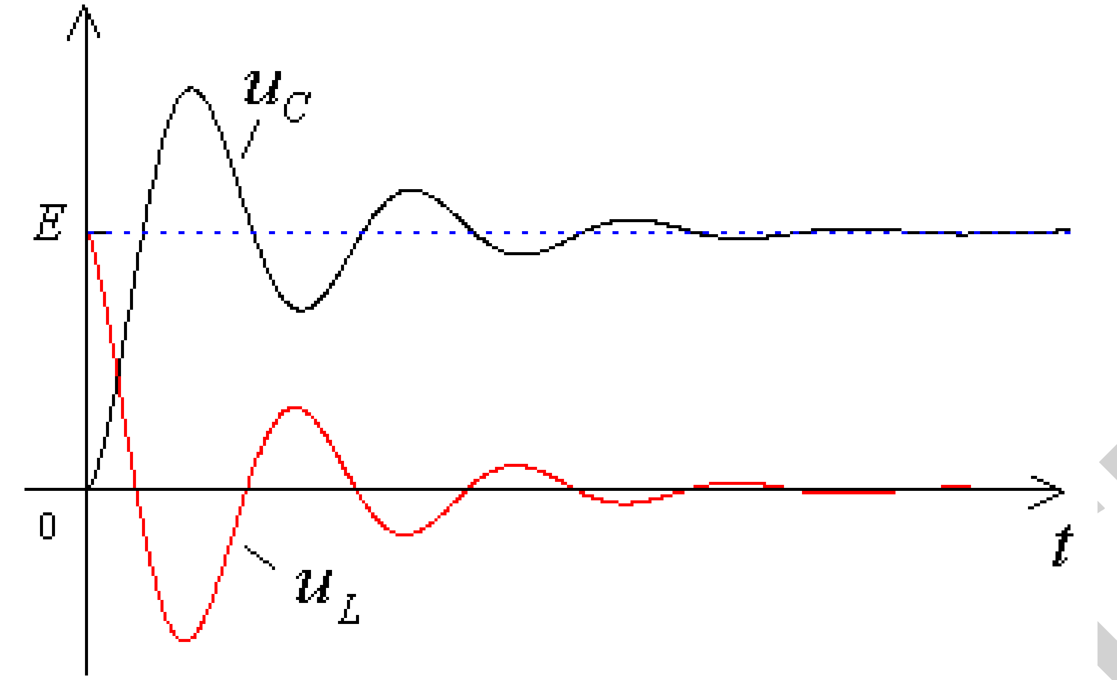
Получим:

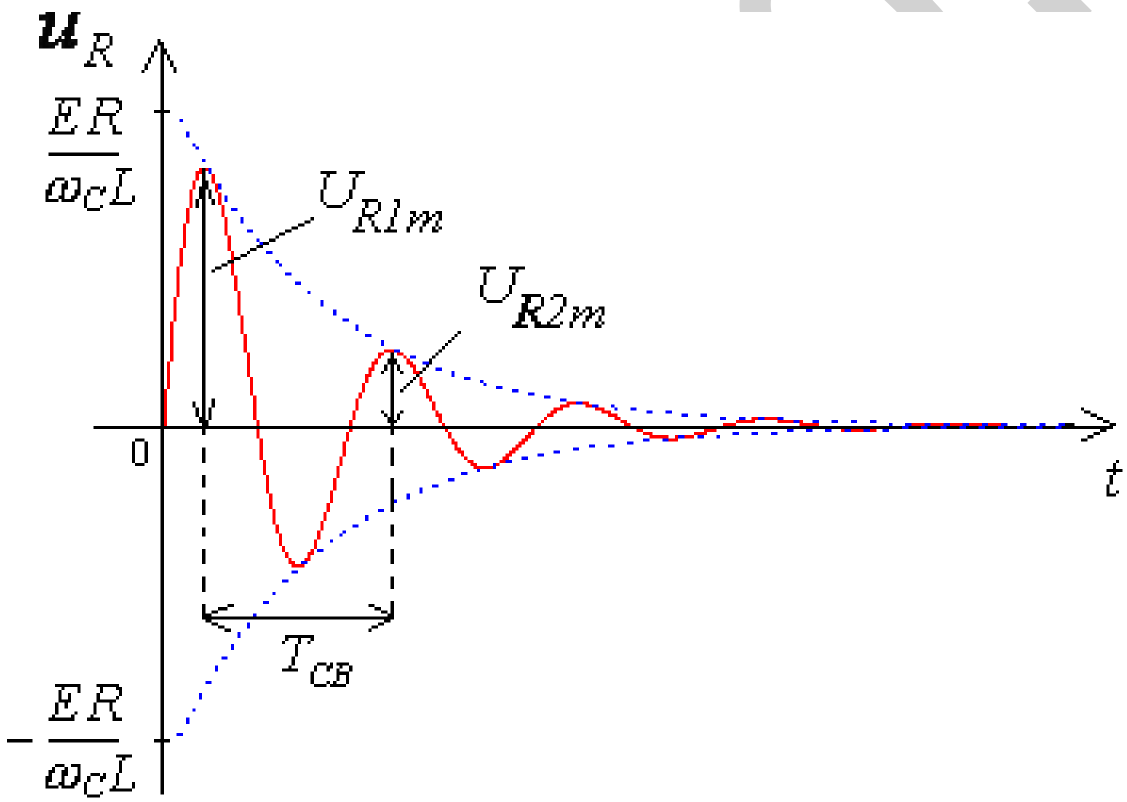
$$u_C(t) = E + \frac{E}{(p_1 - p_2)}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \approx E(1 - e^{-\alpha t}\cos\omega_C t)$$

$$u_L(t) = Ee^{-\alpha\cdot\ t}(\cos\omega_C t - \frac{\alpha}{\omega_C}\sin\omega_C t)$$

$$u_R = RC\frac{du_C}{dt} = \frac{ER}{\omega_C L}e^{-\alpha t}\sin\omega_C t$$

На рисунках приведены графики данных переходных величин





Периодом свободных колебаний называется величина $T_{CB} = \dfrac{2\pi}{\omega_C}$

Отношение амплитуд U_{1m}/U_{2m} отстоящих во времени на отрезок T_{CB}, носит название **декремента затухания**

$$\Delta = \frac{U_{1m}}{U_{2m}} = e^{\alpha T_{CB}}$$

Логарифмическим декрементом затухания называют величину

$$\Theta = \ln \Delta = \ln e^{\alpha T_{CB}} = \alpha T_{CB} = \frac{2\pi\alpha}{\omega_C}$$

Как видно из рисунка, за период T_{CB}, ток u_Rзатухает в $e^{\alpha T_{CB}}$ раз.

В) $\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – корни равные, отрицательные: $p_1 = p_2 = p = -\frac{R}{2L}$

В цепи имеет место **предельный апериодический ПП**.

Из условия $\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ определим критическое сопротивление, $R_{KP} = 2\sqrt{L/C}$ при котором имеет место данный ПП

Общее решение уравнения в этом случае ищем в виде:

$$u_C(t) = (A_1 + A_2 t)e^{pt}$$

Постоянные A_1 иA_2 определим также как и в предыдущих пунктах из начальных условий.

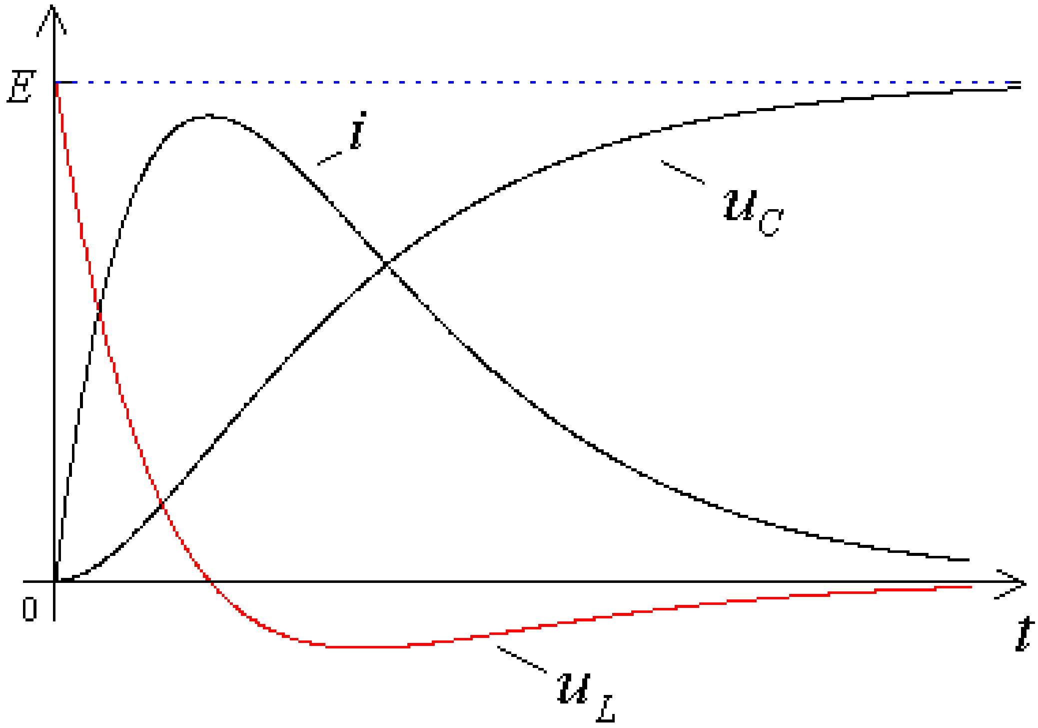
С учетом этого получим выражение для переходных величин

$$u_C(t) = \frac{E}{LC}e^{pt}\left(\frac{t}{p} - \frac{1}{p^2}\right) + E$$

$$u_R(t) = \frac{ER}{L}te^{pt}$$

$$u_L(t) = Ee^{pt}(1 + pt)$$

На рисунках приведены графики данных переходных величин:


E
i
u_C
0
t
u_L