

К цепи, схема которой приведена на рис.2, приложено напряжение  $u_{вх}(t)$ , заданное графиком (рис.3), которым выбирается в соответствии с номером варианта.

Требуется выполнить следующее:

1. Несинусоидальную периодическую функцию  $u_{вх}(t)$  представить в виде разложения в тригонометрический ряд. Найти постоянную составляющую и первые четыре гармонических составляющих.

Примечание. Для разложения функции в ряд использовать прил.3 к учебнику [1] или табл.7.1 в учебнике [2], учитывая при этом наличие постоянной составляющей и сдвиг по времени начала кривой  $u_{вх}(t)$  по отношению к табличным кривым.

2. Построить кривую по первым трем составляющим разложения функции  $u_{вх}(t)$  (постоянная составляющая и две первых гармоники) и сравнить ее с заданной функцией.
3. Принимая во времени лишь постоянную составляющую и две первых гармоники функции  $u_{вх}(t)$ , определить:
  - а) показания электродинамических приборов, указанных на рис.2;
  - б) мгновенные значения напряжения  $u_{вх}(t)$ ;
  - в) активную и полную мощности, а также коэффициент мощности цепи.

Числовое значение величин, соответствующих номеру варианта, приведены в табл.3, а значения сопротивлений  $R_2$  и  $R_3$ , соответствующие номеру группы, - в табл.5.

Для всех вариантов основная угловая частота

$$\omega = 1000 \text{ рад/с.}$$

Содержание графической части:

1. Схема цепи.
2. График напряжения.
3. Кривая, построенная по первым трем составляющим разложения  $u_{вх}(t)$ .

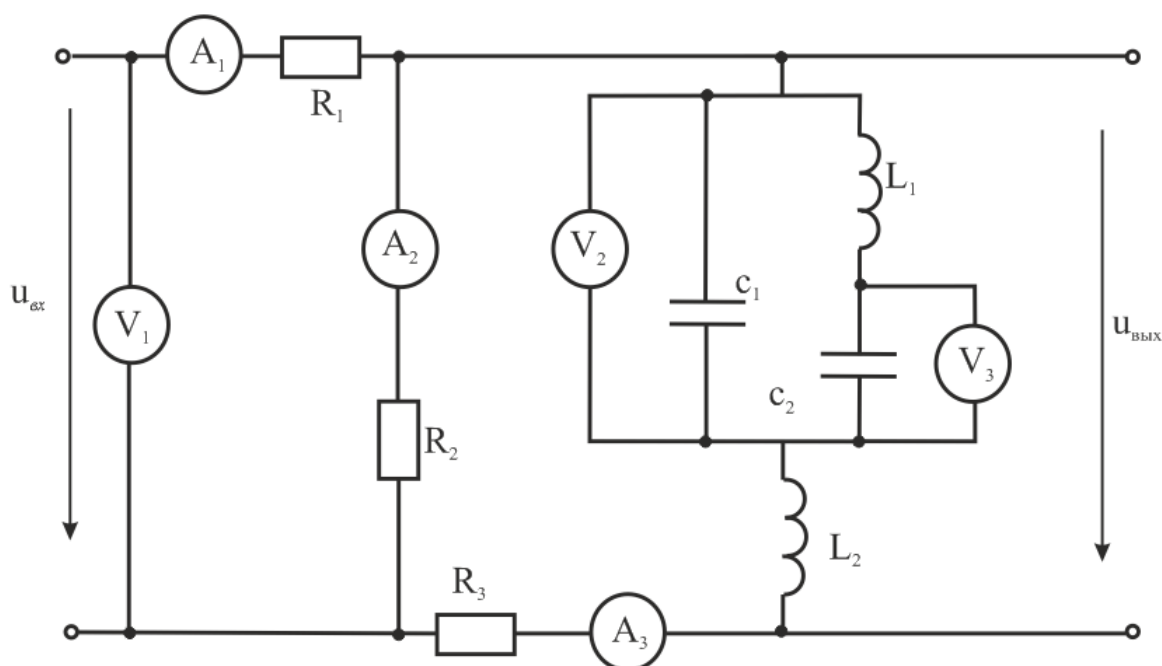
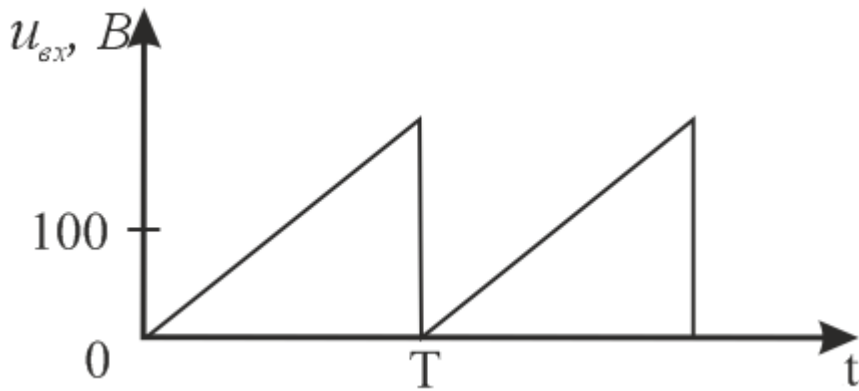


Рис. 2



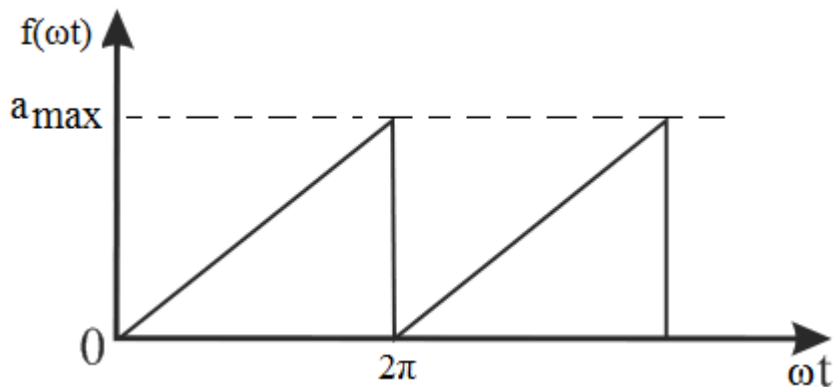
$R_2, \text{ Ом}$	15
$R_3, \text{ Ом}$	20

$L_1, \text{ мГн}$	$L_2, \text{ мГн}$	$C_1, \text{ мкФ}$	$C_2, \text{ мкФ}$	$R_1, \text{ Ом}$
20	32	5,55	25	30

### Решение

1. Несинусоидальную периодическую функцию  $u_{вх}(t)$  представим в виде разложения в тригонометрический ряд. Найдём постоянную составляющую и первые четыре гармонических составляющих.

Для разложения функции в ряд используем приложение 3 к учебнику [1]



$$f(\omega \cdot t) = a_{\max} \cdot \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) \right) \right]$$

В нашем случае

$$\omega = 1000 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$a_{\max} = 200 \text{ В}$$

Постоянная составляющая:

$$U_0 = \frac{a_{\max}}{2} = \frac{200}{2} = 100 \text{ В}$$

первые четыре гармонические составляющие:

$$\frac{a_{\max}}{\pi} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \frac{200}{\pi} \cdot \sin(1000 \cdot t) \quad \text{В}$$

$$\frac{a_{\max}}{2 \cdot \pi} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) = \frac{100}{\pi} \cdot \sin(2000 \cdot t) \quad \text{В}$$

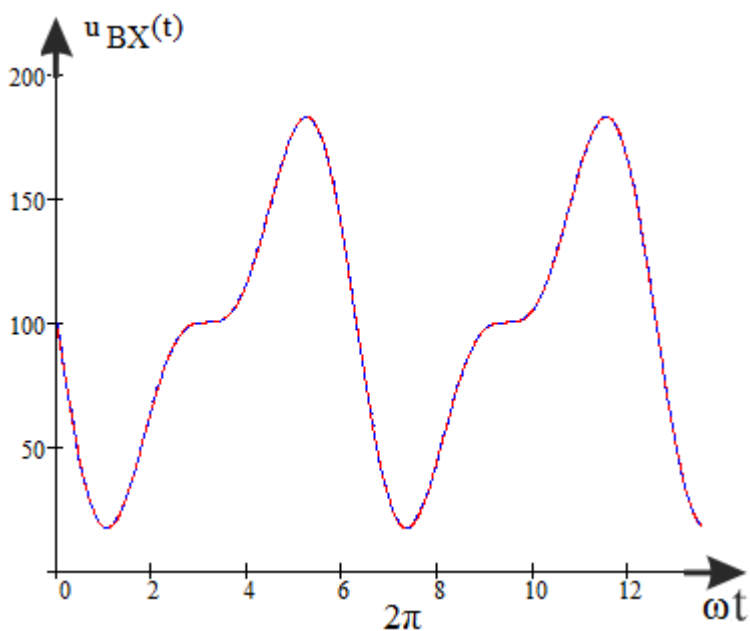
$$\frac{a_{\max}}{4 \cdot \pi} \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t) = \frac{50}{\pi} \cdot \sin(3000 \cdot t) \quad \text{В}$$

$$\frac{a_{\max}}{4 \cdot \pi} \cdot \sin(4 \cdot \omega \cdot t) = \frac{50}{\pi} \cdot \sin(4000 \cdot t) \quad \text{В}$$

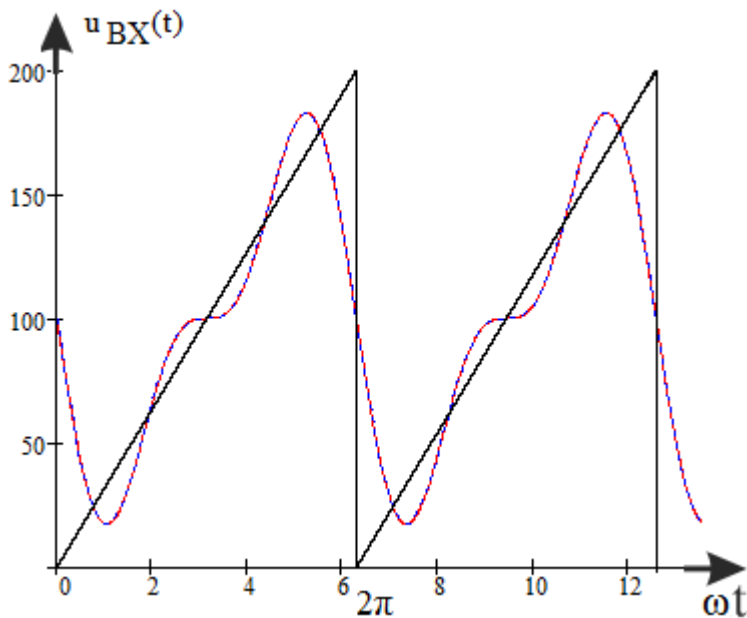
для  $n=1$ ,  $n=2$ ,  $n=3$  и  $n=4$  соответственно

2. Построим кривую по первым трем составляющим разложения

$$u_{\text{BX}}(t) = 2U_0 \cdot \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \left( \sin(\omega t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) \right) \right]$$

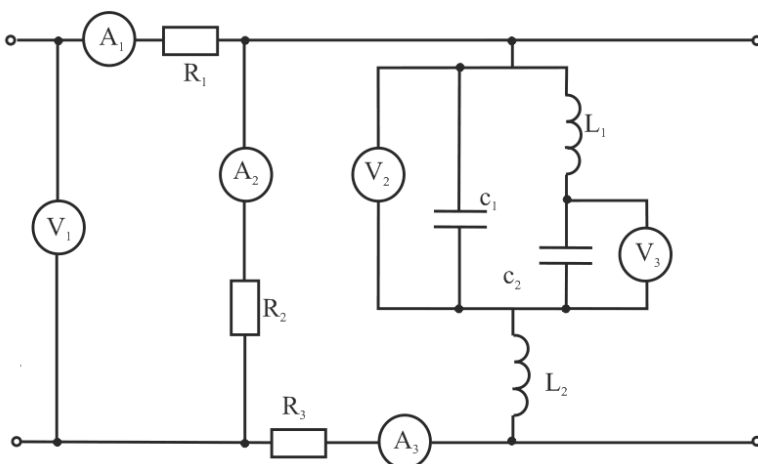


Для сравнения приведём также график исходной функции и данного разложения в одной системе координат:

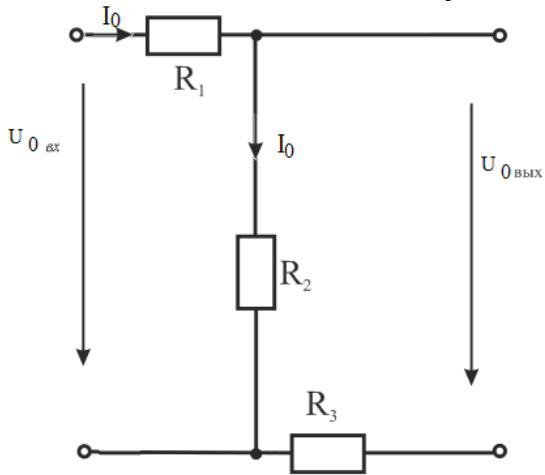


Значения исходной функции и её разложения достаточно точно совпадают, за исключением областей вблизи точек разрыва  $(0, 2\pi, 4\pi, \dots)$ , где имеются существенные отличия

3. Принимая во внимание лишь постоянную составляющую и две первых гармоники функции  $u_{BX}(t)$  определим
  - а) определим показания электродинамических приборов на основе расчёта схемы в два этапа:
    - I. Рассчитаем цепь при действии постоянной составляющей и каждой гармонике (комплексным методом).
    - II. Путём суммирования частных решений получим интегральные значения токов (напряжений) элементов цепи, на которых нужно определить показания приборов.



Для постоянной составляющей произведём расчёт схемы, учитывая, что конденсатор представляет собой разрыв, а катушка индуктивности – короткое замыкание. Схема в этом случае имеет вид



По закону Ома:

$$I_0 = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{100}{30 + 15} = \frac{20}{9} = 2.222 \text{ A}$$

Тогда токи и напряжения участков, где включены приборы:

$$U_1 = U_0 = 100 \text{ В}$$

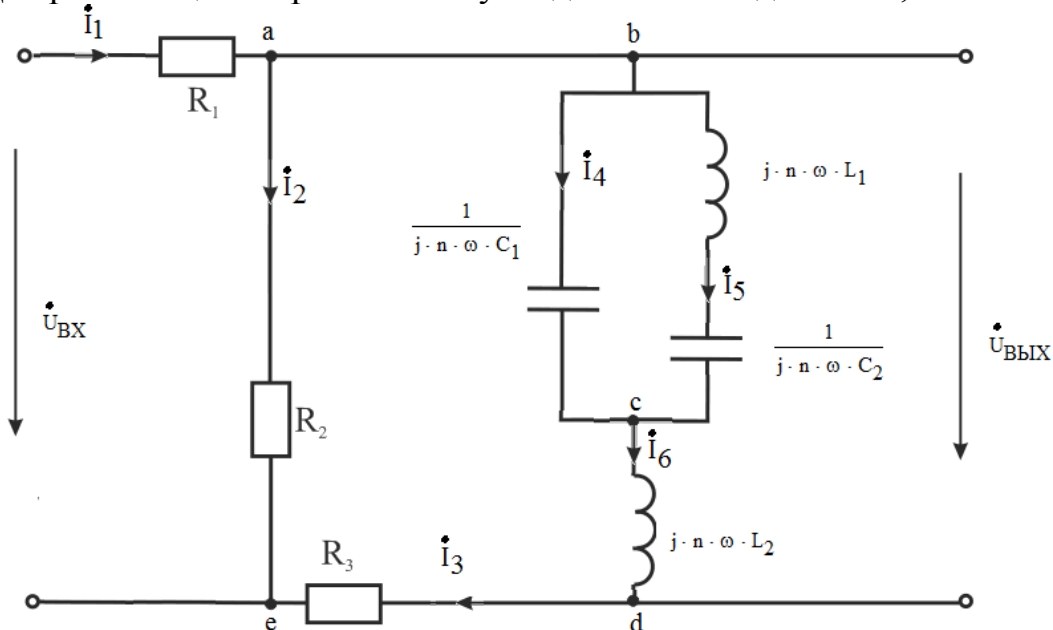
$$I_1 = I_0 = 2.222 \text{ А}$$

$$I_2 = I_0 = 2.222 \text{ А}$$

$$I_3 = 0 \text{ А}$$

$$U_{\text{ВЫХ}} = U_2 = U_3 = R_2 \cdot I_0 = 15 \cdot \frac{20}{9} = \frac{100}{3} = 33.333 \text{ В}$$

Для расчёта цепи в режиме синусоидального воздействия, схема имеет вид



Комплексные сопротивления участков

$$\underline{Z}_{bc} = \frac{\left( j \cdot n \cdot \omega \cdot L_1 + \frac{1}{j \cdot n \cdot \omega \cdot C_2} \right) \cdot \left( \frac{1}{j \cdot n \cdot \omega \cdot C_1} \right)}{j \cdot n \cdot \omega \cdot L_1 + \frac{1}{j \cdot n \cdot \omega \cdot C_2} + \frac{1}{j \cdot n \cdot \omega \cdot C_1}} = j \cdot \frac{1 - n^2 \cdot \omega^2 \cdot L_1 \cdot C_2}{n \cdot \omega \cdot \left( n^2 \cdot \omega^2 \cdot L_1 \cdot C_2 \cdot C_1 - C_1 - C_2 \right)} =$$

$$= j \cdot \frac{1 - n^2 \cdot 1000^2 \cdot (20 \cdot 10^{-3}) \cdot (25 \cdot 10^{-6})}{n \cdot 1000 \cdot \left[ n^2 \cdot 1000^2 \cdot (20 \cdot 10^{-3}) \cdot (25 \cdot 10^{-6}) \cdot (555 \cdot 10^{-8}) - 555 \cdot 10^{-8} - 25 \cdot 10^{-6} \right]} = j \cdot \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot n^2}{n \cdot \left( \frac{111}{40000} \cdot n^2 - \frac{611}{20000} \right)}$$

$$\underline{Z}_{L2} = j \cdot n \cdot \omega \cdot L_2 = j \cdot n \cdot 1000 \cdot 32 \cdot 10^{-3} = j \cdot 32 \cdot n$$

$$\underline{Z}_{C2} = \frac{1}{j \cdot n \cdot \omega \cdot C_2} = \frac{40}{j \cdot n}$$

для n=1:

$$\underline{Z}_{bc} = j \cdot \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2}{1 \cdot \left( \frac{111}{40000} \cdot 1^2 - \frac{611}{20000} \right)} = \frac{-20000}{1111} \cdot j \approx -18 \cdot j \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{L2} = 32 \cdot j \quad \text{Ом}$$

$$\underline{Z}_{C2} = -40 \cdot j \quad \text{Ом}$$

для n=2:

$$\underline{Z}_{bc} = j \cdot \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot 2^2}{2 \cdot \left( \frac{111}{40000} \cdot 2^2 - \frac{611}{20000} \right)} = \frac{10000}{389} \cdot j = 25.707 \cdot j \quad \text{Ом}$$

$$\underline{Z}_{L2} = 64 \cdot j \quad \text{Ом}$$

$$\underline{Z}_{C2} = -20 \cdot j \quad \text{Ом}$$

Определим токи и напряжения участков цепи для n=1:

Комплексная амплитуда первой гармоники входного напряжения:

$$\dot{U}_{BX} = \frac{200}{\pi \cdot \sqrt{2}} = 45.016 \quad \text{В}$$

Входное комплексное сопротивление:

$$\underline{Z}_{BX} = R_1 + \frac{R_2 \cdot (R_3 + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{L2})}{R_2 + R_3 + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{L2}} = 30 + \frac{15 \cdot (20 - 18 \cdot j + 32 \cdot j)}{15 + 20 - 18 \cdot j + 32 \cdot j} = 30 + \frac{300 + 210 \cdot j}{35 + 14 \cdot j} = \frac{8010}{203} + \frac{450}{203} \cdot j = 39.52 \cdot e^{j \cdot 3.215^\circ} \quad \text{Ом}$$

Комплекс тока первой ветви:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{BX}}{\underline{Z}_{BX}} = \frac{45.016}{39.52 \cdot e^{j \cdot 3.215^\circ}} = 1.139 \cdot e^{-j \cdot 3.215^\circ} \quad \text{А}$$

Комплекс напряжения между узлами а и е:

$$\dot{U}_{ae} = Z_{ae} \cdot \dot{I}_1$$

где

$$Z_{ae} = \frac{R_2 \cdot (R_3 + Z_{bc} + Z_{L2})}{R_2 + R_3 + Z_{bc} + Z_{L2}} = \frac{15 \cdot (20 - 18 \cdot j + 32 \cdot j)}{15 + 20 - 18 \cdot j + 32 \cdot j} = \frac{1920}{203} + \frac{450}{203} \cdot j = 9.714 \cdot e^{j \cdot 13.191^\circ} \quad \text{Ом}$$

$$\dot{U}_{ae} = 9.714 \cdot e^{j \cdot 13.191^\circ} \cdot 1.139 \cdot e^{-j \cdot 3.215^\circ} = 11.064 \cdot e^{j \cdot 9.976^\circ} \quad \text{В}$$

Комплекс тока второй ветви:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ae}}{R_2} = \frac{11.064 \cdot e^{j \cdot 9.976^\circ}}{15} = 0.738 \cdot e^{j \cdot 9.976^\circ} \quad \text{А}$$

Комплекс тока третьей ветви:

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ae}}{R_3 + Z_{bc} + Z_{L2}} = \frac{11.064 \cdot e^{j \cdot 9.976^\circ}}{20 - 18 \cdot j + 32 \cdot j} = \frac{11.064 \cdot e^{j \cdot 9.976^\circ}}{24.413 \cdot e^{j \cdot 34.992^\circ}} = 0.453 \cdot e^{-j \cdot 25.016^\circ} \quad \text{А}$$

Комплекс напряжения на конденсаторе  $C_1$ :

$$\dot{U}_2 = Z_{bc} \cdot \dot{I}_3 = -18 \cdot j \cdot 0.453 \cdot e^{-j \cdot 25.016^\circ} = 8.154 \cdot e^{-j \cdot 115.016^\circ} \quad \text{В}$$

Комплекс тока второго конденсатора:

$$\dot{I}_{C2} = \frac{\dot{U}_2}{j \cdot \omega \cdot L_1 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2}} = \frac{8.154 \cdot e^{-j \cdot 115.016^\circ}}{-20 \cdot j} = 0.408 \cdot e^{-j \cdot 25.017^\circ} \quad \text{В}$$

напряжение на конденсаторе  $C_2$

$$\dot{U}_3 = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2} \cdot \dot{I}_{C2} = -40 \cdot j \cdot 0.408 \cdot e^{-j \cdot 25.017^\circ} = 16.32 \cdot e^{-j \cdot 115.017^\circ} \quad \text{В}$$

Напряжение на выходе:

$$\dot{U}_{\text{ВЫХ}} = (Z_{bc} + Z_{L2}) \cdot \dot{I}_3 = (-18 \cdot j + 32 \cdot j) \cdot 0.453 \cdot e^{-j \cdot 25.017^\circ} = 6.346 \cdot e^{j \cdot 64.983^\circ} \quad \text{В}$$

Определим токи и напряжения участков цепи для  $n=2$ :

Комплексная амплитуда второй гармоники входного напряжения:

$$\dot{U}_{\text{ВХ}} = \frac{100}{\sqrt{2} \cdot \pi} = 22.508 \quad \text{В}$$

Входное комплексное сопротивление:

$$Z_{\text{ВХ}} = R_1 + \frac{R_2 \cdot (R_3 + Z_{bc} + Z_{L2})}{R_2 + R_3 + Z_{bc} + Z_{L2}} = 30 + \frac{15 \cdot (20 + 25.707 \cdot j + 64 \cdot j)}{15 + 20 + 25.707 \cdot j + 64 \cdot j} = 30 + \frac{300 + 210 \cdot j}{35 + 14 \cdot j} = 44.151 + 2.177 \cdot j = 44.204 \cdot e^{j \cdot 2.823^\circ} \quad \text{Ом}$$

Комплекс тока первой ветви:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{BX}}{Z_{BX}} = \frac{22.508}{44.204 \cdot e^{j \cdot 2.823^\circ}} = 0.509 \cdot e^{-j \cdot 2.823^\circ} \quad \text{A}$$

Комплекс напряжения между узлами а и е:

$$\dot{U}_{ae} = Z_{ae} \cdot \dot{I}_1$$

где

$$Z_{ae} = \frac{R_2 \cdot (R_3 + Z_{bc} + Z_{L2})}{R_2 + R_3 + Z_{bc} + Z_{L2}} = \frac{15 \cdot (20 + 25.707 \cdot j + 64 \cdot j)}{15 + 20 + 25.707 \cdot j + 64 \cdot j} = 14.151 + 2.177j = 14.317 \cdot e^{j \cdot 8.745^\circ} \quad \text{Ом}$$

$$\dot{U}_{ae} = 14.317 \cdot e^{j \cdot 8.745^\circ} \cdot 0.509 \cdot e^{-j \cdot 2.823^\circ} = 7.29 \cdot e^{-j \cdot 5.923^\circ} \quad \text{В}$$

Комплекс тока второй ветви:

$$\dot{I}_2 = \frac{7.29 \cdot e^{-j \cdot 5.923^\circ}}{15} = 0.486 \cdot e^{-j \cdot 5.923^\circ} \quad \text{A}$$

Комплекс тока третьей ветви:

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ae}}{R_3 + Z_{bc} + Z_{L2}} = \frac{7.29 \cdot e^{-j \cdot 5.923^\circ}}{20 + 25.707 \cdot j + 64 \cdot j} = 0.0793 \cdot e^{-j \cdot 71.509^\circ} \quad \text{A}$$

Комплекс напряжения на конденсаторе C<sub>1</sub>:

$$\dot{U}_2 = 25.707 \cdot j \cdot (0.0793 \cdot e^{-j \cdot 71.509^\circ}) = 2.039 \cdot e^{j \cdot 18.491^\circ} \quad \text{В}$$

Комплекс тока второго конденсатора:

$$\dot{I}_{C2} = \frac{\dot{U}_2}{j \cdot 2 \cdot \omega \cdot L_1 + \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \omega \cdot C_2}} = \frac{2.039 \cdot e^{j \cdot 18.491^\circ}}{20 \cdot j} = 0.102 \cdot e^{-j \cdot 71.509^\circ} \quad \text{A}$$

напряжение на конденсаторе C<sub>2</sub>:

$$\dot{U}_3 = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \omega \cdot C_2} \cdot \dot{I}_{C2} = \frac{0.102 \cdot e^{-j \cdot 71.509^\circ}}{-20 \cdot j} = 2.039 \cdot e^{-j \cdot 161.509^\circ} \quad \text{В}$$

Напряжение на выходе:

$$\dot{U}_{ВЫХ} = (Z_{bc} + Z_{L2}) \cdot \dot{I}_3 = (25.707 \cdot j + 64 \cdot j) \cdot (0.0793 \cdot e^{-j \cdot 71.509^\circ}) = 7.1153 \cdot e^{j \cdot 18.491^\circ} \quad \text{В}$$

Для определения показаний приборов составим таблицу частных решений найденных токов и напряжений ветвей:

	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>
Пост ток	2.222 А	2.222 А	0 А	100 В	33.333 В	33.333 В
n=1	1.139 А	0.738 А	0.453 А	45.016 В	8,154 В	16,32 В
n=2	0,509 А	0,486 А	0,079 А	22,508 В	2,039 В	2,039 В

Показания приборов определим используя следующие соотношения:



$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2}$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2}$$

Показания амперметров:

$$I_{A1} = \sqrt{2.222^2 + 1.139^2 + 0.509^2} = 2.548 \text{ А}$$

$$I_{A2} = \sqrt{2.222^2 + 0.738^2 + 0.486^2} = 2.391 \text{ А}$$

$$I_{A3} = \sqrt{0^2 + 0.453^2 + 0.079^2} = 0.46 \text{ А}$$

Показания вольтметров:

$$U_{V1} = \sqrt{100^2 + 45.016^2 + 25.508^2} = 112.593 \text{ В}$$

$$U_{V2} = \sqrt{33.333^2 + 8.154^2 + 2.039^2} = 34.376 \text{ В}$$

$$U_{V3} = \sqrt{33.333^2 + 16.32^2 + 2.039^2} = 37.17 \text{ В}$$

б) мгновенное значение напряжения  $u_{\text{вых}}(t)$ ;

Для выходного напряжения ранее найдены постоянная составляющая и комплексные амплитуды для  $n=1$  и  $n=2$ . Ещё раз приведём данные значения:

Пост ток	$U_{\text{ВЫХ}} = 33.333 \text{ В}$
$n=1$	$\dot{U}_{\text{ВЫХ}} = 6.346 \cdot e^{j \cdot 64.983^\circ} \text{ В}$
$n=2$	$\dot{U}_{\text{ВЫХ}} = 7.1153 \cdot e^{j \cdot 18.491^\circ} \text{ В}$

Следовательно, мгновенное значение

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = 33.333 + \sqrt{2} \cdot 6.346 \cdot \sin(1000 \cdot t + 64.983^\circ) + \sqrt{2} \cdot 7.1153 \cdot \sin(2000 \cdot t + 18.491^\circ) \text{ В}$$

в) активная мощность цепи:

$$P = I_{A1}^2 \cdot R_1 + I_{A2}^2 \cdot R_2 + I_{A3}^2 \cdot R_3 = 2.548^2 \cdot 30 + 2.391^2 \cdot 15 + 0.46^2 \cdot 20 = 284.754 \text{ Вт}$$

полная мощность цепи:

$$S = U \cdot I = U_{V1} \cdot I_{A1} = 112.593 \cdot 2.548 = 286.887 \text{ ВА}$$

коэффициент мощности цепи

$$\chi = \frac{P}{S} = \frac{284.754}{286.887} = 0.993$$