

ЗАДАЧА 3. Анализ линейной цепи несинусоидального тока в установившемся режиме

Для заданной схемы цепи (рис. 3.1) с параметрами пассивных элементов, указанными в табл. 3.1, параметрами источника несинусоидальной ЭДС, указанными в табл. 3.2, выполнить следующие расчеты:

1. Заданную несинусоидальную ЭДС $e(t)$ разложить в ряд Фурье.
2. Построить графики заданной ЭДС $e(t)$ и приближенной ЭДС $e_{\text{прибл}}(t)$, вычисленной в соответствии с рядом Фурье с учетом четырех его членов: постоянной составляющей (если она есть), основной гармонике и двух высших гармоник.
3. Вычислить токи и напряжения ветвей, представив их в виде гармонических рядов.
4. Вычислить действующие значения токов и напряжений ветвей.
5. Проверить баланс мощности по активной ее составляющей.
6. На примере рассматриваемой цепи, исключив из кривой ЭДС постоянную составляющую, показать, что наличие в кривой ЭДС высших гармоник уменьшает коэффициент мощности цепи по сравнению с коэффициентом мощности $\cos\varphi$ этой же самой цепи при чисто синусоидальной ЭДС основной частоты.

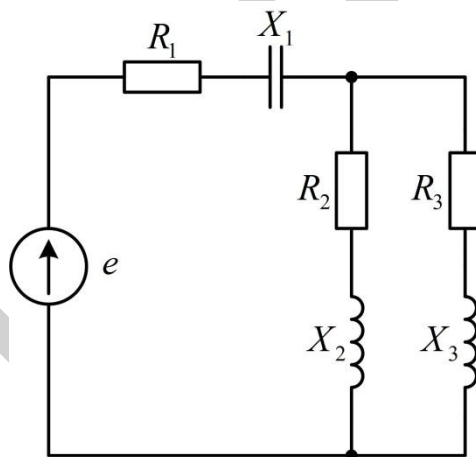


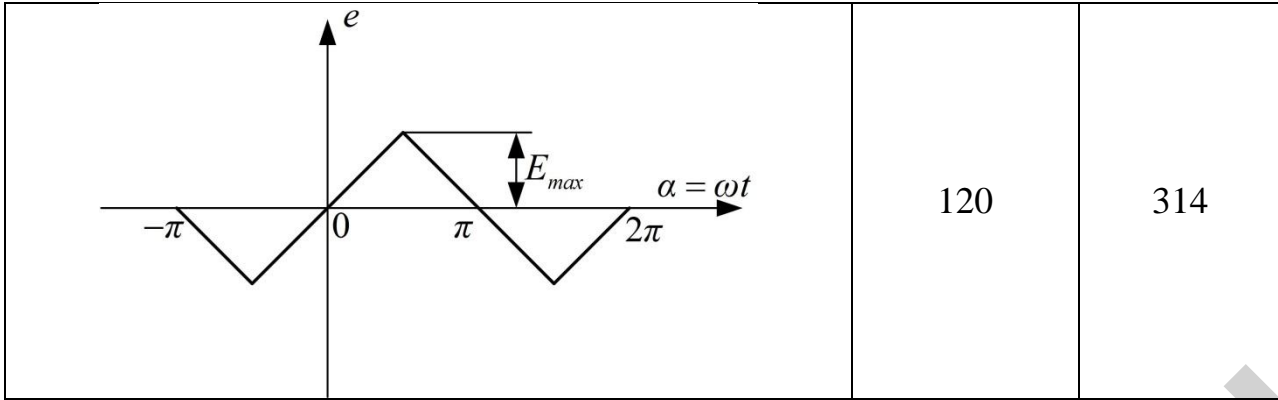
рис. 3.1

Таблица 3.1. Параметры пассивных элементов

R_1	X_1	R_2	X_2	R_3	X_3
8	8	8	8	8	8

Таблица 3.2. Параметры источника несинусоидальной ЭДС

Форма кривой $e(t)$	E_{max} , В	Частота осн. гармоники ω , 1/с



$$f(\alpha) = \begin{cases} -\pi - \alpha, & -\pi < \alpha < -\pi/2 \\ \alpha, & -\pi/2 < \alpha < \pi/2 \\ \pi - \alpha, & \pi/2 < \alpha < \pi \end{cases}$$

$$f(\alpha) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \alpha - \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \frac{\sin 5\alpha}{5^2} - \dots \right), \quad e(t) = \frac{E_{max}}{b} f(\alpha).$$

toe100.ru

1. Разложение в ряд Фурье

$$f(\alpha) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \alpha - \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \frac{\sin 5\alpha}{5^2} \right) = 1,273 \sin \alpha - 0,141 \sin 3\alpha + 0,051 \sin 5\alpha;$$

$$e(t) = \frac{E_{max}}{b} f(\alpha) = \frac{120}{\pi/2} (1,273 \sin \alpha - 0,141 \sin 3\alpha + 0,051 \sin 5\alpha) = 97,25 \sin 314t - 10,772 \sin 942t + 3,896 \sin 1570t \text{ В.}$$

2. Построение графиков ЭДС

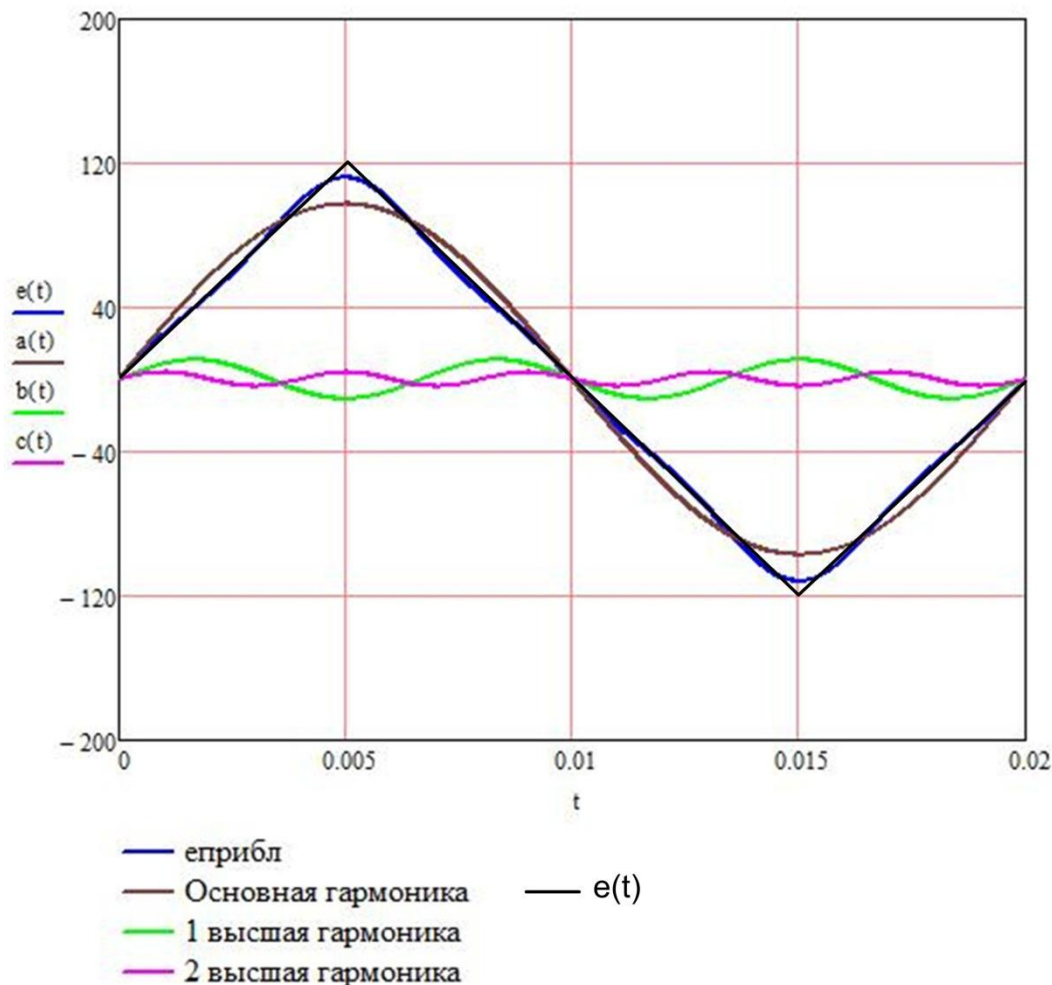


Рис. 3.2

3. Вычисление токов и напряжений ветвей

3.1. Вычисление токов и напряжений для основной гармоники

Полные сопротивления ветвей в комплексном виде:

$$\underline{Z}_1^{(1)} = R_1 - jX_1 = 8 - j8 = 11,314e^{-j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2^{(1)} = \underline{Z}_3^{(1)} = R_2 + jX_2 = 8 + j8 = 11,314e^{j45^\circ} \text{ Ом.}$$

Полное эквивалентное сопротивление цепи:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{э\text{кв}}^{(1)} &= \underline{Z}_1^{(1)} + \frac{\underline{Z}_2^{(1)} \underline{Z}_3^{(1)}}{\underline{Z}_2^{(1)} + \underline{Z}_3^{(1)}} = 8 - j8 + \frac{(8 + j8)(8 + j8)}{8 + j8 + 8 + j8} = \\ &= 12 - j4 = 12,649e^{-j18,4^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Амплитудное значение тока первой ветви:

$$I_{m1}^{(1)} = \frac{E_m^{(1)}}{\underline{Z}_{э\text{кв}}^{(1)}} = \frac{97,25}{12,649e^{-j18,4^\circ}} = 7,688e^{j18,4^\circ} \text{ А.}$$

Амплитудные значения токов второй и третьей ветвей:

$$I_{m2}^{(1)} = I_{m3}^{(1)} = I_{m1}^{(1)} \cdot \frac{Z_3^{(1)}}{Z_2^{(1)} + Z_3^{(1)}} = 7,688e^{j18,4^\circ} \cdot \frac{8 + j8}{8 + j8 + 8 + j8} = 3,844e^{j18,4^\circ} \text{ А.}$$

По закону Ома определяем напряжения ветвей:

$$U_{m1}^{(1)} = I_{m1}^{(1)} Z_1^{(1)} = 7,688e^{j18,4^\circ} \cdot 11,314e^{-j45^\circ} = 86,982e^{-j26,6^\circ} \text{ В;}$$

$$U_{m2}^{(1)} = U_{m2}^{(1)} = I_{m2}^{(1)} Z_2^{(1)} = 3,844e^{j18,4^\circ} \cdot 11,314e^{j45^\circ} = 43,491e^{j63,4^\circ} \text{ В.}$$

3.2. Вычисление токов и напряжений для первой высшей гармоники

Полные сопротивления ветвей в комплексном виде:

$$Z_1^{(3)} = R_1 - j \frac{X_1}{3} = 8 - j \frac{8}{3} = 8 - j2,667 = 8,433e^{-j18,4^\circ} \text{ Ом;}$$

$$Z_2^3 = Z_3^{(3)} = R_2 + jX_2 \cdot 3 = 8 + j8 \cdot 3 = 8 + j24 = 25,298e^{j71,6^\circ} \text{ Ом.}$$

Полное эквивалентное сопротивление цепи:

$$\begin{aligned} Z_{\text{экв}}^{(1)} &= Z_1^{(1)} + \frac{Z_2^{(1)} Z_3^{(1)}}{Z_2^{(1)} + Z_3^{(1)}} = 8 - j2,667 + \frac{(8 + j24)(24 + j24)}{8 + j24 + 8 + j24} = \\ &= 12 + j9,333 = 15,202e^{j37,9^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Амплитудное значение тока первой ветви:

$$I_{m1}^{(3)} = \frac{E_m^{(3)}}{Z_{\text{экв}}^{(3)}} = \frac{10,772}{15,202e^{j37,9^\circ}} = 0,709e^{-j37,9^\circ} \text{ А.}$$

Амплитудные значения токов второй и третьей ветвей:

$$I_{m2}^{(3)} = I_{m3}^{(3)} = I_{m1}^{(3)} \cdot \frac{Z_3^{(3)}}{Z_2^{(3)} + Z_3^{(3)}} = 0,709e^{-j37,9^\circ} \cdot \frac{8 + j24}{8 + j24 + 8 + j24} = 0,355e^{-j37,9^\circ} \text{ А.}$$

По закону Ома определяем напряжения ветвей:

$$U_{m1}^{(3)} = I_{m1}^{(3)} Z_1^{(3)} = 0,709e^{-j37,9^\circ} \cdot 8,433e^{-j18,4^\circ} = 5,98e^{-j56,3^\circ} \text{ В;}$$

$$U_{m2}^{(3)} = U_{m2}^{(3)} = I_{m2}^{(3)} Z_2^{(3)} = 0,355e^{-j37,9^\circ} \cdot 25,298e^{j71,6^\circ} = 8,981e^{j33,7^\circ} \text{ В.}$$

3.3. Вычисление токов и напряжений для второй высшей гармоники

Полные сопротивления ветвей в комплексном виде:

$$Z_1^{(5)} = R_1 - j \frac{X_1}{5} = 8 - j \frac{8}{5} = 8 - j1,6 = 8,158e^{-j11,3^\circ} \text{ Ом;}$$

$$Z_2^{(5)} = Z_3^{(5)} = R_2 + jX_2 \cdot 5 = 8 + j8 \cdot 5 = 8 + j40 = 40,792e^{j78,7^\circ} \text{ Ом.}$$

Полное эквивалентное сопротивление цепи:

$$\begin{aligned} Z_{\text{экв}}^{(5)} &= Z_1^{(5)} + \frac{Z_2^{(5)} Z_3^{(5)}}{Z_2^{(5)} + Z_3^{(5)}} = 8 - j1,6 + \frac{(8 + j40)(24 + j40)}{8 + j40 + 8 + j40} = \\ &= 12 + j18,4 = 21,967e^{j56,9^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Амплитудное значение тока первой ветви:

$$I_{m1}^{(5)} = \frac{E_m^{(5)}}{Z_{\text{экв}}^{(5)}} = \frac{3,896}{21,967e^{j56,9^\circ}} = 0,178e^{-j56,9^\circ} \text{ А.}$$

Амплитудные значения токов второй и третьей ветвей:

$$I_{m2}^{(5)} = I_{m3}^{(5)} = I_{m1}^{(5)} \cdot \frac{Z_3^{(5)}}{Z_2^{(5)} + Z_3^{(5)}} = 0,178e^{-j56,9^\circ} \cdot \frac{8 + j40}{8 + j40 + 8 + j40} = 0,088e^{-j56,9^\circ} \text{ А.}$$

По закону Ома определяем напряжения ветвей:

$$\mathcal{U}_{m1}^{(5)} = \mathcal{I}_{m1}^{(5)} Z_1^{(5)} = 0,178e^{-j56,9^\circ} \cdot 8,158e^{-j11,3^\circ} = 1,452e^{-j68,2^\circ} \text{ В};$$

$$\mathcal{U}_{m2}^{(5)} = \mathcal{I}_{m2}^{(5)} Z_2^{(5)} = 0,088e^{-j57^\circ} \cdot 40,792e^{j78,7^\circ} = 3,59e^{j21,7^\circ} \text{ В}.$$

3.4. Мгновенные значения токов и напряжений

Запишем мгновенные значения токов и напряжений ветвей:

$$i_1 = 7,688 \sin(314t + 18,4^\circ) - 0,709 \sin(942t - 37,9^\circ) + 0,178 \sin(1570t - 56,9^\circ) \text{ А};$$

$$i_2 = i_3 = 3,844 \sin(314t + 18,4^\circ) - 0,355 \sin(942t - 37,9^\circ) + 0,088 \sin(1570t - 56,9^\circ) \text{ А};$$

$$u_1 = 86,982 \sin(314t - 26,6^\circ) - 5,98 \sin(942t - 56,3^\circ) + 1,452 \sin(1570t - 68,2^\circ) \text{ В};$$

$$u_2 = u_3 = 43,491 \sin(314t + 63,4^\circ) - 8,981 \sin(942t + 33,7^\circ) + 3,59 \sin(1570t + 21,7^\circ) \text{ В}.$$

4. Действующие значения напряжений и токов ветвей

Вычислим действующие значения токов и напряжений ветвей:

$$I_1 = \sqrt{\frac{I_{m1}^{(1)2} + I_{m1}^{(3)2} + I_{m1}^{(5)2}}{2}} = \sqrt{\frac{7,688^2 + 0,709^2 + 0,178^2}{2}} = 5,461 \text{ А};$$

$$I_2 = I_3 = \sqrt{\frac{I_{m2}^{(1)2} + I_{m2}^{(3)2} + I_{m2}^{(5)2}}{2}} = \sqrt{\frac{3,844^2 + 0,355^2 + 0,088^2}{2}} = 2,73 \text{ А};$$

$$U_1 = \sqrt{\frac{U_{m1}^{(1)2} + U_{m1}^{(3)2} + U_{m1}^{(5)2}}{2}} = \sqrt{\frac{86,982^2 + 5,98^2 + 1,452^2}{2}} = 61,66 \text{ В};$$

$$U_2 = U_3 = \sqrt{\frac{U_{m2}^{(1)2} + U_{m2}^{(3)2} + U_{m2}^{(5)2}}{2}} = \sqrt{\frac{43,491^2 + 8,981^2 + 3,59^2}{2}} = 31,504 \text{ В}.$$

5. Баланс мощности

Активная мощность источника:

$$\begin{aligned} P_{ист} &= \frac{E_m^{(1)}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{m1}^{(1)}}{\sqrt{2}} \cdot \cos(18,4^\circ) + \frac{E_m^{(3)}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{m1}^{(3)}}{\sqrt{2}} \cdot \cos(37,9^\circ) + \frac{E_m^{(5)}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{m1}^{(5)}}{\sqrt{2}} \cdot \cos(56,9^\circ) = \\ &= \frac{97,25}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7,688}{\sqrt{2}} \cdot \cos(18,4^\circ) + \frac{10,772}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0,709}{\sqrt{2}} \cdot \cos(37,9^\circ) + \\ &\quad + \frac{3,896}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0,178}{\sqrt{2}} \cdot \cos(56,9^\circ) = 357,92 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Активная мощность потребителей:

$$P_{пот} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = 5,461^2 \cdot 8 + 2,73^2 \cdot 8 + 2,73^2 \cdot 8 = 357,827 \text{ Вт}.$$

Активные мощности источника и потребителей практически равны, следовательно, параметры цепи рассчитаны верно.

6. При воздействии на данную цепь чисто синусоидальной ЭДС основной частоты коэффициент мощности цепи будет следующим:

$$\cos \varphi = \cos(18,4^\circ) = 0,949.$$

Коэффициент мощности определяется как отношение активной мощности цепи к ее полной мощности:

$$\cos \varphi' = \frac{P}{S} = \frac{P}{EI_1}.$$

Рассчитаем действующее значение несинусоидальной ЭДС, приложенной к цепи:

$$E = \sqrt{\frac{E_m^{(1)2} + E_m^{(3)2} + E_m^{(5)2}}{2}} = \sqrt{\frac{97,25^2 + 10,772^2 + 3,896^2}{2}} = 69,242 \text{ В.}$$

Определим полную мощность цепи:

$$S = EI_1 = 69,242 \cdot 5,461 = 378,13 \text{ ВА.}$$

Определим коэффициент мощности цепи при воздействии на нее источника несинусоидальной ЭДС:

$$\cos \varphi' = \frac{P}{S} = \frac{357,827}{378,13} = 0,946.$$

Как видно из расчета, наличие в кривой ЭДС высших гармоник уменьшает коэффициент мощности цепи по сравнению с коэффициентом мощности этой же цепи при воздействии на нее чисто синусоидальной ЭДС основной частоты.