

**Пример 3.** Рассчитать активный RC – фильтр нижних частот Баттерворта. В полосе пропускания  $0 < f < f_1 = 40$  Гц ослабление не должно превышать  $\Delta A = 2$  Дб, а при частоте  $f_s = 90$  Гц и более высоких частотах должно быть не менее  $A_s = 18$  Дб. Значения емкостей равны  $C_1 = C_2 = 0,08$  мкФ,  $m_R = R_1/R_2 = 1$ .

**Решение.** вычисляем нормированную частоту  $\Omega_s = f_s / f_1 = 90/40 = 2,25$  и вычисляем порядок фильтра

$$n = \frac{A_s - 10 \lg(10^{0,1 \Delta A} - 1)}{20 \lg \Omega_s}; \quad n = \frac{18 - 10 \lg(10^{0,1 \cdot 2} - 1)}{20 \lg 2,25} = 2,88;$$

Так как порядок фильтра должен быть целым числом, берем  $n = 3$ , т. е. необходимо рассчитать фильтр 3-го порядка. Фильтр состоит из двух звеньев второго порядка и одного звена первого порядка.

вычисляем нули передаточной функции Баттерворта:

$j := \sqrt{-1}$

Äÿ íââðîüö n

$$S(k) := \cos\left(\frac{k}{n} \cdot \pi\right) + j \cdot \sin\left(\frac{k}{n} \cdot \pi\right)$$

$k := 1..2 \cdot n$

$S(k) =$

0.5+0.86603i
-0.5+0.86603i
-1
-0.5-0.86603i
0.5-0.86603i
1

Рисунок 9– Расчет нулей передаточной функции

Из этих  $2n = 6$  значений выбираем те  $n = 3$  значений, которые имеют отрицательные вещественные части:

$$s_2 = -0.5 + 0.86603j; \quad s_3 = -1; \quad s_4 = -0.5 - 0.86603j.$$

Произведение сомножителей  $(s-s_1) (s-s_2) (s-s_4)$ , соответствующих всем  $s_k$  с отрицательными вещественными частями, образует полином. знаменатель передаточной функции равен:  $V_1(s) = (s-s_1) (s-s_2) (s-s_4)$

Вычисляем квадратные трехчлены знаменателя передаточной функции:

$$(s-s_2) (s-s_4) = (s + 0.5 - 0.86603j) (s + 0.5 + 0.86603j) = s^2 + s + 1;$$

Мы получили нормированное выражение первого звена второго порядка.

$$V_2(s) = s - s_3 = s + 1 - \text{нормированное выражение второго звена первого порядка.}$$

Таким образом, мы имеем возможность составить нормированную передаточную функцию фильтра:

$$H(s) = \frac{1}{V_1(s)V_2(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1} \cdot \frac{1}{s + 1}$$

Коэффициенты, входящие в знаменатель можно определить по таблице 7. Для  $n = 3$ , как и в нашем случае для первого звена:  $A = 1, B = 1$ ; для второго звена  $C = 1$ .

Определим передаточные функции для каждого звена фильтра:

$$H_1(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \text{ и } H_2(s) = \frac{1}{s + 1};$$

Определим передаточную функцию звеньев после денормирования:

$$H_1(p) = \frac{1}{(p/\omega_c)^2 + (p/\omega_c) + 1}; \quad H_2(p) = \frac{1}{(p/\omega_c) + 1};$$

где  $\omega_c$  – нормирующая частота, соответствующая ослаблению 3дБ.

$$\omega_c = 2\pi \cdot f_1 / \sqrt[2n]{10^{0,1\Delta A}} - 1 = 2 \cdot 3,14 \cdot 40 / \sqrt[2 \cdot 3]{10^{0,1 \cdot 2}} - 1 = 274,821/c$$

После преобразования (учитывая коэффициенты усиления звеньев), получим:

$$H_1(p) = \frac{k_1 \cdot \omega_c^2}{p^2 + \omega_c \cdot p + \omega_c^2}; \quad H_2(p) = \frac{k_2 \cdot \omega_c}{p + \omega_c};$$

С учетом числовых значений:

$$H_1(p) = \frac{k_1 \cdot 7,553 \cdot 10^4}{p^2 + 274,821 \cdot p + 7,553 \cdot 10^4}; \quad H_2(p) = \frac{k_2 \cdot 274,821}{p + 274,82};$$

Определим неизвестные параметры первого звена второго порядка:  $k_1, R_1, R_2, R_3, R_4$ .

Для первого звена имеем:  $B = 1, C = 1$ , по условию:  $C_1 = C_2 = 0,08 \cdot 10^{-6}$ ,  $m_R = 1 = \frac{R_1}{R_2}$ .

Воспользуемся формулами (41) и составим систему уравнений:

$$R_2 = \frac{1}{C \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot \omega_c^2}; \quad \frac{R_1}{R_2} = 1;$$

$$\text{Откуда} \quad R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{1}{C \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \omega_c^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 \cdot (0,08 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 274,821^2}} = 4,548 \cdot 10^4 \text{ Ом};$$

Из уравнения

$$R_1 = \frac{1}{\left[ B \cdot C_2 + \sqrt{B^2 + 4 \cdot C \cdot (k_1 - 1)} \right] \cdot C_2^2 - 4 \cdot C \cdot C_1 \cdot C_2} \cdot \omega_c;$$

Определим коэффициент усиления первого звена:

$$k_1 = \left( \frac{1}{R_1 \cdot \omega_c \cdot C_2 \cdot \sqrt{C}} - \frac{B}{2 \cdot \sqrt{C}} \right)^2 + \frac{C_1}{C_2} + \frac{B^2}{4 \cdot C} + 1 = \left( \frac{1}{4,548 \cdot 10^4 \cdot 0,08 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{1}} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1}} \right)^2 + \frac{0,08 \cdot 10^{-6}}{0,08 \cdot 10^{-6}} + \frac{1^2}{4 \cdot 1} + 1 = 2;$$

Определяем параметры делителя напряжения:

$$R_3 = k_1 \cdot \frac{R_1 + R_2}{k_1 - 1} = 2 \cdot \frac{4,548 \cdot 10^4 + 4,548 \cdot 10^4}{2 - 1} = 1,819 \cdot 10^4 \text{ Ом};$$

$$R_4 = k_1 \cdot (R_1 + R_2) = 2 \cdot (4,548 \cdot 10^4 + 4,548 \cdot 10^4) = 1,819 \cdot 10^4 \text{ Ом};$$

Определим неизвестные параметры второго звена первого порядка:  $k_2, R_1, R_2, R_3$ .

Для данной схемы положим:  $k_2 = 1$  (пассивная схема)<sup>1</sup>. Звено показано на рисунке 10

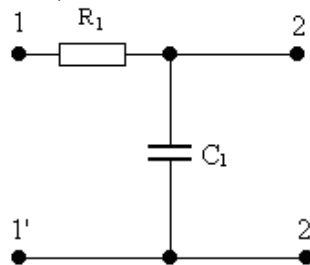


Рисунок 10 – Пассивная схема звена первого порядка ФНЧ

Для второго звена имеем:  $C = 1, C_1 = 0,08 \cdot 10^{-6}$ ,  $m_R = 1 = \frac{R_1}{R_2}$ .

$$R_1 = \frac{1}{C \cdot C_1 \cdot \omega_c} = \frac{1}{1 \cdot 0,08 \cdot 10^{-6} \cdot 274,821} = 4,548 \cdot 10^4 \text{ Ом};$$

Схема фильтра имеет вид:

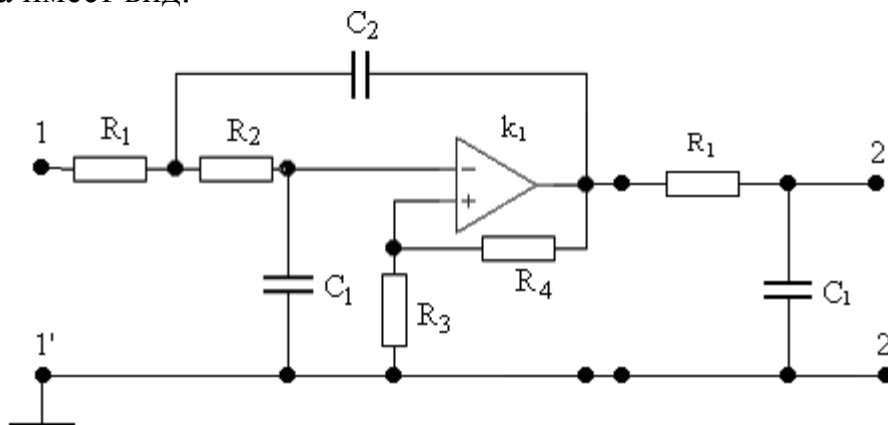


Рисунок 11 – Схема ARC ФНЧ для n = 3

Общий коэффициент усиления фильтра:  $k = k_1 k_2 = 2$ .

Рассчитаем ослабление фильтра без учета коэффициента усиления (для проверки выполнения условий задачи):

$$H(p) := \frac{2 \times 7.55302 \times 10^4}{p^2 + 274.82765 p + 7.55302 \times 10^4} \cdot \frac{274.82765}{p + 274.82765}$$

С ó-áòñ òñáì, ÷òì  $p := j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$

$$H(f) := \frac{2 \times 7.55302 \times 10^4}{(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^2 + 274.82765(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f) + 7.55302 \times 10^4} \cdot \frac{274.82765}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f + 274.82765}$$

Ðàññ-èòááì ñéááéáéá èèèùòðá, ááç ó-áòá èñóðèèèááòá óñééáéèè

$$A(f) := -20 \cdot \log\left(\left|\frac{H(f)}{k_1 \cdot k_2}\right|\right)$$

Рисунок 12 – Расчет рабочего ослабления ARC ФНЧ без учета коэффициента усиления

Построим график  $A = A(f)$  (ПП и ПЗ можно указать, используя графические редакторы):

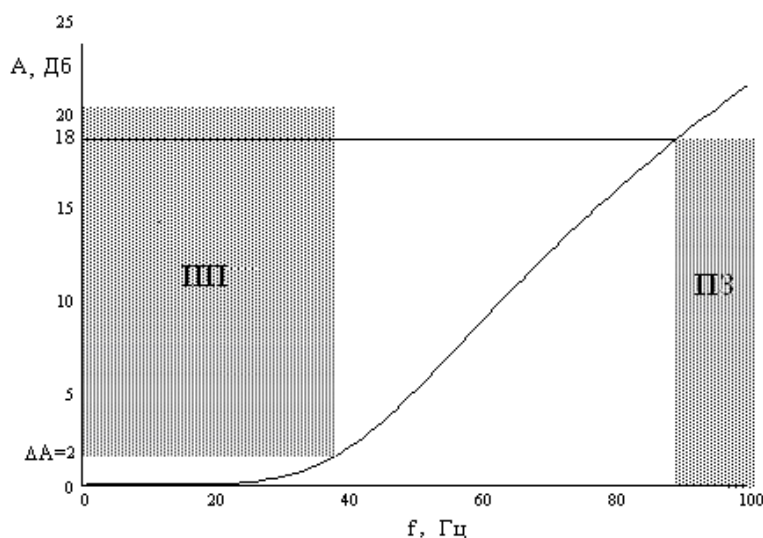


Рисунок 13 – График рабочего ослабления ARC ФНЧ без учета коэффициента усиления

Как видно из графика, данный фильтр удовлетворяет условиям задачи.

Рассчитаем ослабление фильтра на частотах:  $f_1$ ;  $f_c$ ;  $f_s$ ;  $1,5 f_s$ ;  $2 f_s$ , с учетом коэффициента усиления:

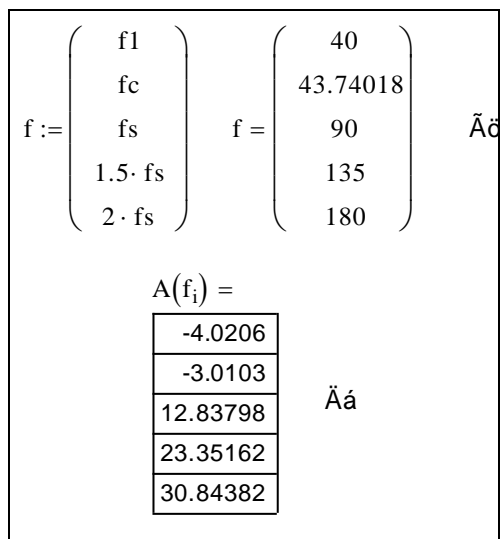


Рисунок 14 – Расчет рабочего ослабления ARC ФНЧ с учетом коэффициента усиления

Построим график  $A = A(f)$ :

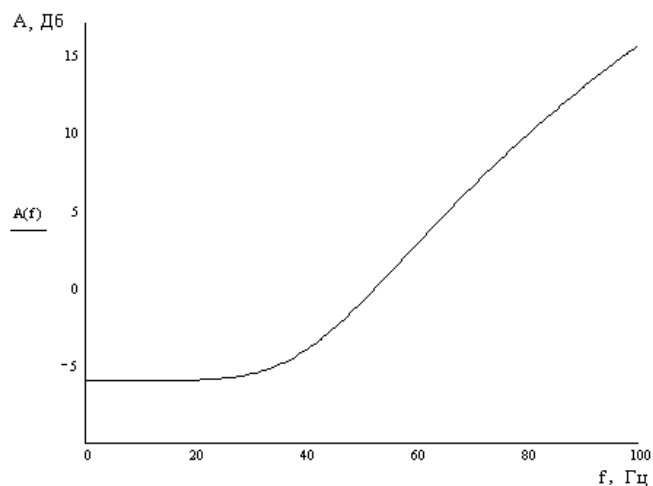


Рисунок 15 – График рабочего ослабления ARC ФНЧ с учетом коэффициента усиления

**Вывод:** Рассчитанный фильтр полностью удовлетворяет условиям задачи.