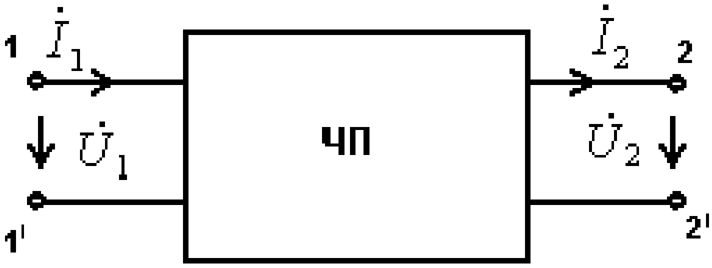
Передаточная функция четырехполюсника

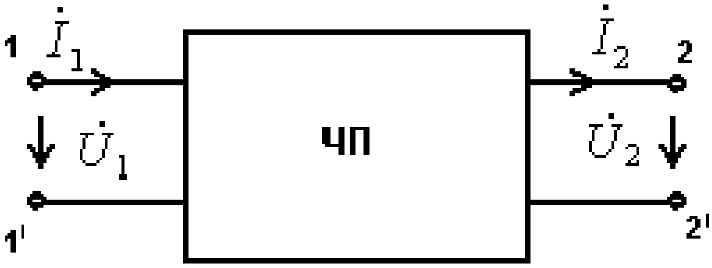


Комплексной передаточной функцией **ЧП** называют отношение комплексной реакции к комплексному воздействию в функции частоты ω**.**

$$H(j\omega) = \frac{F_2(j\omega)}{F_1(j\omega)}$$

$F_2(j\omega)$ – комплексная реакция в функции частоты

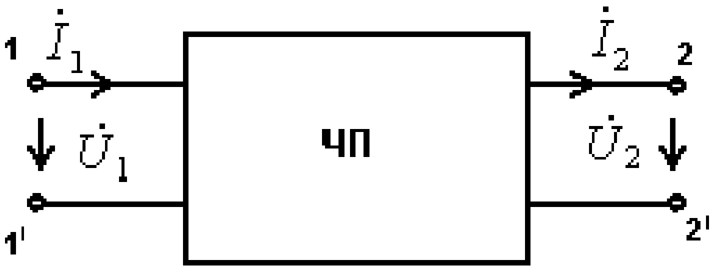
$F_1(j\omega)$ - комплексное воздействие в функции частоты



Различают комплексную передаточную функцию по напряжению $H_U(j\omega)$ комплексную передаточную функцию по току $H_I(j\omega)$, комплексную передаточную проводимость $Y_{21}(j\omega)$ комплексное передаточное сопротивление $Z_{21}(j\omega)$:

$$H_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2(j\omega)}{\dot{U}_1(j\omega)} \quad H_I(j\omega) = \frac{\dot{I}_2(j\omega)}{\dot{I}_1(j\omega)}$$

$$Y_{21}(j\omega) = \frac{\dot{I}_2(j\omega)}{\dot{U}_1(j\omega)} \quad Z_{21}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2(j\omega)}{\dot{I}_1(j\omega)}$$



Рассмотрим подробно комплексную передаточную функцию по напряжению.

$$H_U(j\omega) = \frac{\dot U_2(j\omega)}{\dot U_1(j\omega)}$$

с учетом того, что

$\dot U_1 = U_1 e^{j\psi_{u_1}}$, а $\dot U_2 = U_2 e^{j\psi_{u_2}}$, то можно записать

$$H_U(j\omega) = \frac{\dot U_2(j\omega)}{\dot U_1(j\omega)} = \frac{U_2 e^{j\psi_{u_2}}}{U_1 e^{j\psi_{u_1}}} = \frac{U_2}{U_1} e^{j(\psi_{u_2} - \psi_{u_1})} = |H_U(j\omega)|\, e^{j\Theta(\omega)}$$

величина $|H_U(j\omega)| = H_U(\omega)$ - зависимость модуля комплексной передаточной функции по напряжению от частоты называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) ЧП. Определяется по следующей формуле

$$H_U(\omega) = \frac{U_2}{U_1}$$

величина $\Theta(\omega)$ - зависимость аргумента комплексной передаточной функции по напряжению от частоты называется фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) ЧП. Определяется по следующей формуле

$$\Theta(\omega) = \psi_{u_2} - \psi_{u_1}$$

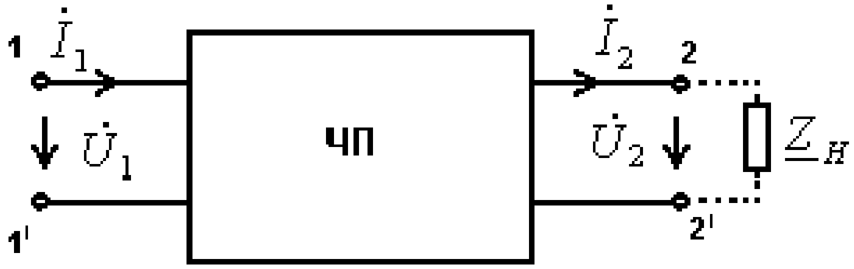
Таким образом комплексная передаточная функция по напряжению записывается в следующем виде

$$H_U(j\omega) = H_U(\omega) e^{j\Theta(\omega)}$$

Используя определение передаточной функции и уравнения ЧП в форме $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$, можно записать

$$H_U(j\omega) = \frac{\dot U_2}{\dot U_1} = \frac{\dot U_2}{\underline{A}\dot U_2 + B\dot I_2}$$

Где коэффициенты $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$являются, в общем случае, функциями частоты.



Если ко вторичным зажимам ЧП подключен приемник, с комплексным сопротивлением $\underline{Z}н$, то учитывая равенство $\underline{Z}н = \dfrac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$, можно записать:

$$H_U(j\omega) = \frac{\underline{Z}н}{\underline{A}\underline{Z}н + B}$$

В режиме холостого хода $\underline{Z}н = \infty$:

$$H_U(j\omega) = \frac{1}{\underline{A}}$$

ЧП с заданными комплексными передаточными функциями $H(j\omega)$ могут выполнять роль фильтров.

Под **электрическими фильтрами** понимают ЧП, включаемые между источником и приемником, назначение которых состоит в том, чтобы беспрепятственно пропускать (без больших затуханий) к приемнику сигналы одних частот и задерживать или пропускать, но с большим затуханием, сигналы других частот.

Диапазон частот, пропускаемых фильтром без затухания, называют **полосой прозрачности**.

Диапазон частот, пропускаемых с затуханием, называют **полосой затухания**.

В качестве примера приведем расчет передаточной функции простейшего *RC*-фильтра.

По определению

$$H_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2(j\omega)}{\dot{U}_1(j\omega)}$$

Где

$$\dot{U}_1(j\omega) = \underline{Z}_{BX}\dot{I}_1 = (R - j\frac{1}{\omega C})\dot{I}_1, \quad a \quad \dot{U}_2(j\omega) = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}_2$$

По первому закону Кирхгофа, для узла ***a***

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$$

Для случая холостого хода

$\dot{I}_3 = 0$, следовательно $\dot{I}_2 = \dot{I}_1$

Таким образом

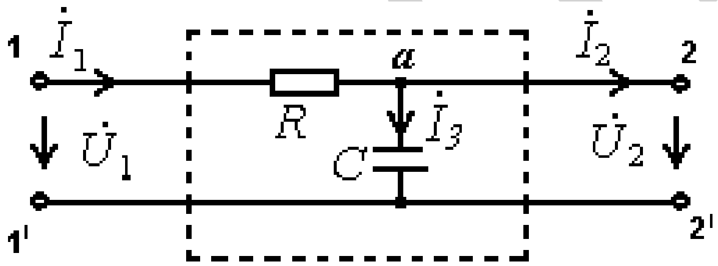
$$H_U(j\omega)=\frac{\dot U_2(j\omega)}{\dot U_1(j\omega)}=\frac{-j\dfrac{1}{\omega C}\dot I_2}{(R-j\dfrac{1}{\omega C})\dot I_1}=\frac{-j\dfrac{1}{\omega C}}{R-j\dfrac{1}{\omega C}}=\frac{\dfrac{1}{\omega C}e^{j(-\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{R^2+(\dfrac{1}{\omega C})^2}\,e^{j\,arcg(-\frac{1}{\omega RC})}}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2+(\dfrac{1}{\omega C})^2}}e^{j\,arctg(\frac{1}{\omega RC})-\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}}e^{j\,arctg(\frac{1}{\omega RC})-\frac{\pi}{2}}$$

Сопоставляя полученное выражение с равенством

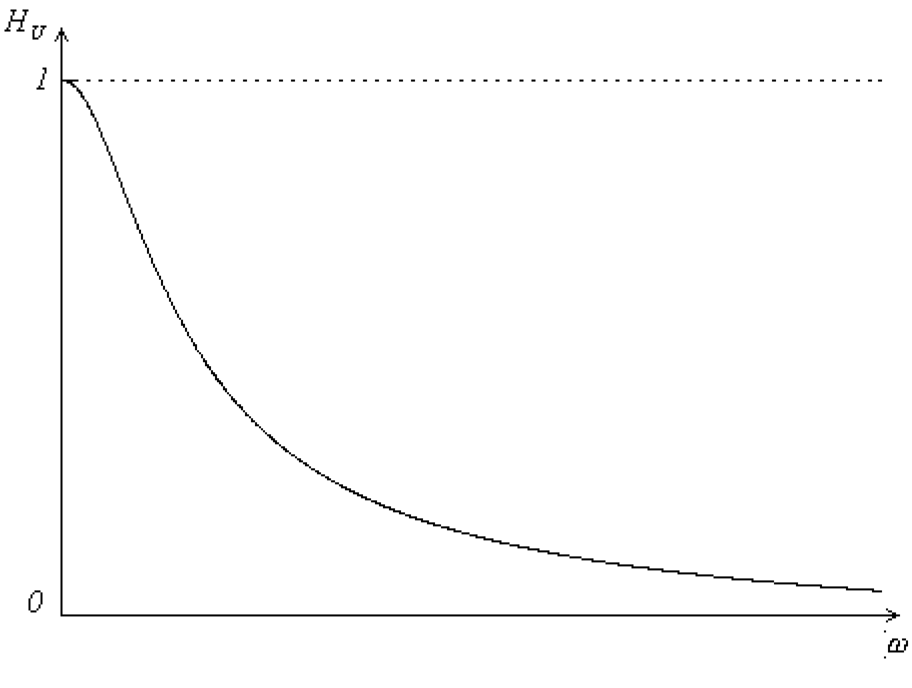
$$H_U(j\omega)=H_U(\omega)e^{j\Theta(\omega)}$$

Определим АЧХ $H_U(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}}$ и ФЧХ данного фильтра $\Theta(\omega)=arctg(\dfrac{1}{\omega RC})-\dfrac{\pi}{2}$

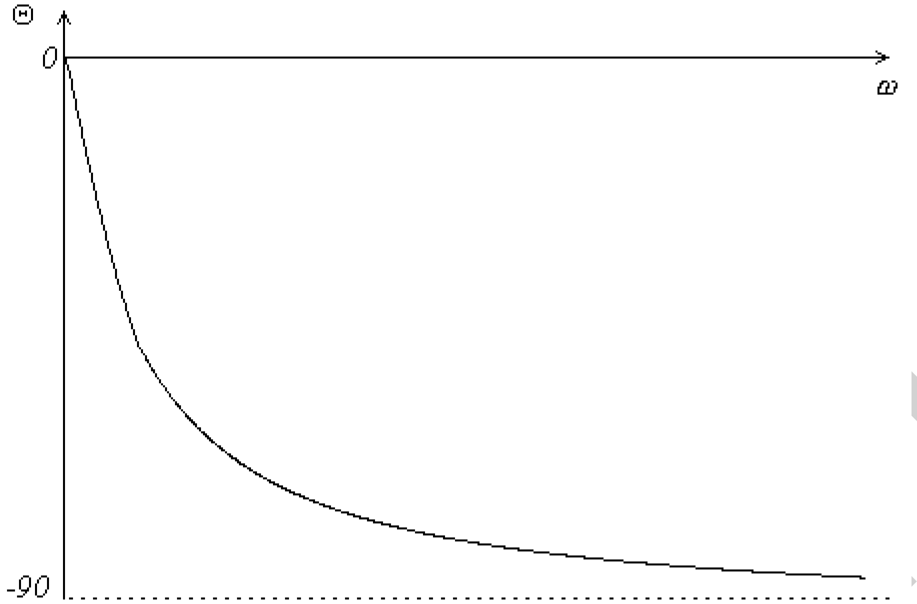


Представим на графике данные зависимости

1. АЧХ: $H_U(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}}$



2. ФЧХ: $\Theta(\omega) = \dfrac{1}{\omega RC} - \dfrac{\pi}{2}$



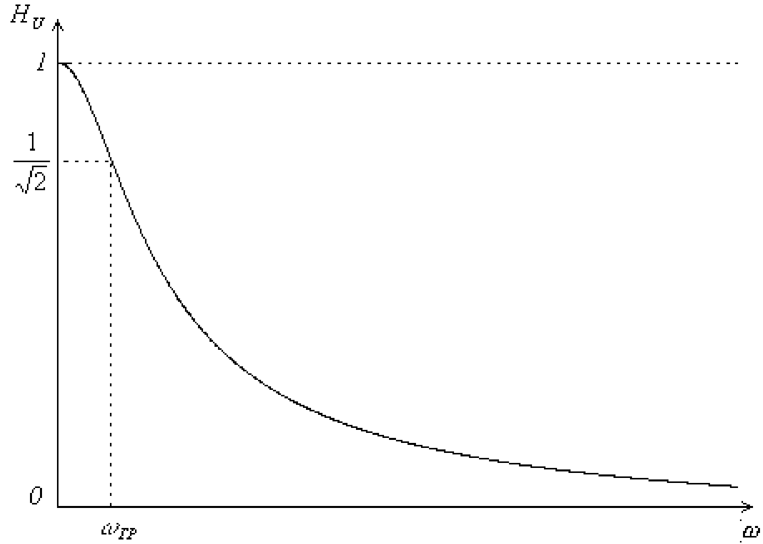
Определим полосу прозрачности фильтра, исходя из того предельное значение модуля передаточной функции $H_U \approx \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$

Подставляя полученное значение в выражение

$$H_U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

Определим, граничную частоту

$$\omega_{ГР} = \frac{1}{RC}$$

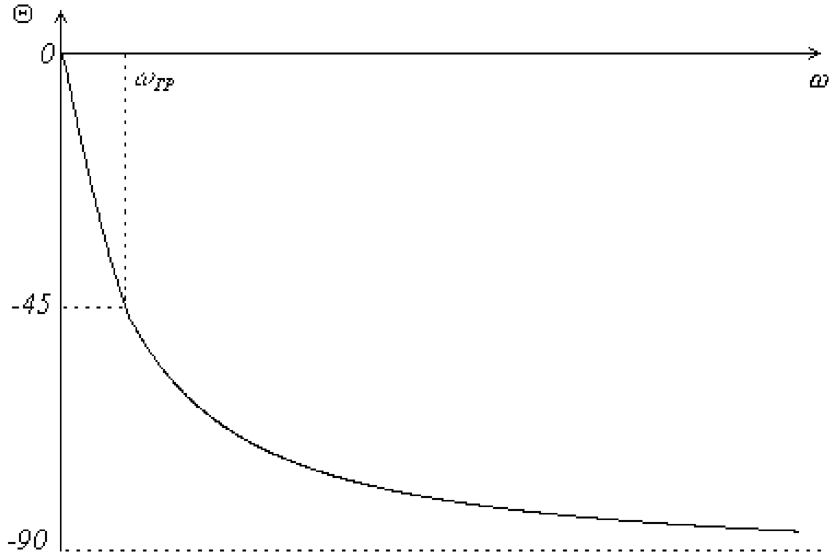


Подставляя полученное соотношение в формулу для

$$\Theta(\omega) = arctg\left(\frac{1}{\omega RC}\right) - \frac{\pi}{2}$$

определим значение аргумента передаточной функции на граничной частоте

$$\Theta(\omega_{ГР}) = -\frac{\pi}{4}$$



Таким образом, полоса прозрачности данного фильтра лежит в интервале (0, 1/RC).