

Анализ линейного четырехполюсника в установившемся режиме синусоидального тока

Для заданной схемы четырехполюсника с параметрами пассивных элементов, указанными в табл. 2.1, и параметрами источника и нагрузки, указанными в табл. 2.2, выполнить следующие расчеты в режиме синусоидальных колебаний при угловой частоте $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$:

1. Рассчитать \underline{Y} , \underline{Z} , \underline{A} -параметры, проверить условие $|\underline{A}| = 1$.
2. Для заданного четырехполюсника по вычисленным \underline{A} -параметрам определить параметры $\underline{Z}_a, \underline{Z}_b, \underline{Z}_c$ эквивалентной Т-образной схемы замещения, не содержащей магнитно-связанных ветвей. Прямым электрическим расчетом схем (исходной и эквивалентной) убедиться в правильности выполненного перехода, рассчитав один из нагрузочных режимов обоих четырехполюсников.
3. Для эквивалентной Т-образной схемы замещения вычислить сопротивления крайних режимов: $\underline{Z}_{10}, \underline{Z}_{1k}, \underline{Z}_{20}, \underline{Z}_{2k}$ непосредственно через $\underline{Z}_a, \underline{Z}_b, \underline{Z}_c$ и, используя их, рассчитать \underline{A} -параметры, сравнить с ранее полученными в п. 1.
4. Для эквивалентной Т-образной схемы замещения вычислить характеристические сопротивления \underline{Z}_{c1} и \underline{Z}_{c2} . Составить схему прямого согласованного включения и вычислить по ней входное сопротивление \underline{Z}_{ex1} . Составить схему обратного согласованного включения и вычислить по ней входное сопротивление \underline{Z}_{ex2} . Сформулировать физический смысл характеристических сопротивлений.
5. Для эквивалентной Т-образной схемы замещения построить круговую диаграмму четырехполюсника при $U_1 = \text{const}$, $Z_2 = (0 + \infty)$, $\varphi_2 = \text{const}$. Вычислить масштабы и указать отрезки, соответствующие $I_1, I_2, U_2, S_1, P_1, Q_1, S_2, P_2, Q_2$. Построить нагрузочные характеристики четырехполюсника, т. е. кривые I_1, U_2, P_1, P_2, η (КПД), $\cos \varphi_1$ в зависимости от тока $I_2 = (0 \div I_{2k})$.
6. Вычислить \underline{Y} , \underline{Z} , \underline{A} -параметры двух каскадно соединенных четырехполюсников, каждый из которых – это рассматриваемый в задаче четырехполюсник.

Таблица 2.1. Параметры пассивных элементов

R_a	X_a	R_b	X_b	R_c	X_c	X_M
4	4	5	5	6	6	4

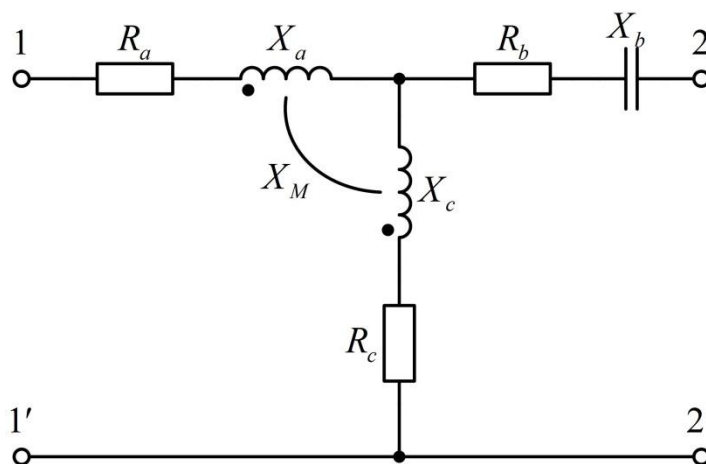


Рис. 2.1

Таблица 2.2. Параметры источника и нагрузки

$U_1, \text{В}$	$\varphi_2, \text{град}$
120	0

toe100.ru

1. Расчет \underline{Y} , \underline{Z} , \underline{A} -параметров

Запишем полные сопротивления ветвей и магнитной связи в комплексном виде:

$$\underline{Z}_a = R_a + jX_a = 4 + j4 = 5,657e^{j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_b = R_b - jX_b = 5 - j5 = 7,071e^{-j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_c = R_c + jX_c = 6 + j6 = 8,485e^{j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_M = jX_M = j4 = 4e^{j90^\circ} \text{ Ом}.$$

Определяем \underline{Z} -параметры четырехполюсника:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_a + \underline{Z}_c - 2\underline{Z}_M = 4 + j4 + 6 + j6 - 2 \cdot j4 = 10 + j2 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_c - \underline{Z}_M = 6 + j6 - j4 = 6 + j2 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_b + \underline{Z}_c = 5 - j5 + 6 + j6 = 11 + j \text{ Ом}.$$

Составим матрицу \underline{Z} -параметров:

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} 10 + j2 & 6 + j2 \\ 6 + j2 & 11 + j \end{pmatrix}$$

Найдем определитель матрицы \underline{Z} -параметров:

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} 10 + j2 & 6 + j2 \\ 6 + j2 & 11 + j \end{vmatrix} = 76 + j8.$$

Определяем \underline{Y} -параметры четырехполюсника:

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{Z}_{22}}{\Delta_Z} = \frac{11 + j}{76 + j8} = 0,145 - j2,055 \cdot 10^{-3} \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = \frac{-\underline{Z}_{12}}{\Delta_Z} = \frac{-6 - 2j}{76 + j8} = -0,081 - j0,018 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{22} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\Delta_Z} = \frac{10 + 2j}{76 + j8} = 0,133 + j0,012 \text{ См}.$$

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} 0,145 - j2,055 \cdot 10^{-3} & -0,081 - j0,018 \\ -0,081 - j0,018 & 0,133 + j0,012 \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы \underline{Y} -параметров:

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} 0,145 - j2,055 \cdot 10^{-3} & -0,081 - j0,018 \\ -0,081 - j0,018 & 0,133 + j0,012 \end{vmatrix} = 0,013 - j1,449 \cdot 10^{-3}$$

Из \underline{Y} -параметров находим \underline{A} -параметры четырехполюсника:

$$A = \frac{-\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}} = \frac{-(0,133 + j0,012)}{-0,081 - j0,018} = 1,596 - j0,207;$$

$$B = \frac{-1}{\underline{Y}_{21}} = \frac{-1}{-0,081 - j0,018} = 11,765 - j2,614 \text{ Ом};$$

$$C = \frac{-\Delta_Y}{\underline{Y}_{21}} = \frac{-(0,013 - j1,449 \cdot 10^{-3})}{-0,081 - j0,018} = 0,149 - j0,051 \text{ См};$$

$$D = \frac{-\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} = \frac{-(0,145 - j2,055 \cdot 10^{-3})}{-0,081 - j0,018} = 1,701 - j0,403.$$

Проверим равенство $AD - BC = 1$:

$$AD - BC = (1,596 - j0,207)(1,701 - j0,403) - \\ - (11,765 - j2,614)(0,149 - j0,051) = 1,002 - j0,006 \approx 1.$$

2. Параметры эквивалентной схемы замещения

Определяем сопротивления ветвей эквивалентного T-образного четырехполюсника без магнитно-связанных ветвей:

$$\underline{Z}_{a3} = \frac{A-1}{C} = \frac{1,596 - j0,207 - 1}{0,149 - j0,051} = 4 - j0,018 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{b3} = \frac{D-1}{C} = \frac{1,701 - j0,403 - 1}{0,149 - j0,051} = 5 - j \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{c3} = \frac{1}{C} = \frac{1}{0,149 - j0,051} = 6 + j2,056 \text{ Ом}.$$

Для проверки правильности выполненного перехода рассчитаем цепь с магнитно-связанными ветвями и без магнитно-связанных ветвей при $U_1 = 120 \text{ В}$ и $\underline{Z}_H = 1 \text{ Ом}$:

- цепь с магнитно-связанными ветвями (рис. 2.2):

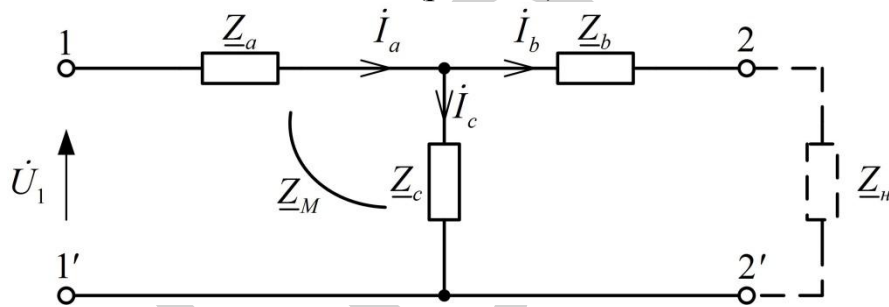


Рис. 2.2

Составляем систему уравнений по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot{\Phi}_a - \dot{\Phi}_b - \dot{\Phi}_c = 0 \\ \dot{\Phi}_a \underline{Z}_a + \dot{\Phi}_b (\underline{Z}_b + \underline{Z}_H) - \dot{\Phi}_c \underline{Z}_M = \dot{\mathcal{E}}_1 \\ -\dot{\Phi}_a \underline{Z}_M - \dot{\Phi}_b (\underline{Z}_b + \underline{Z}_H) + \dot{\Phi}_c \underline{Z}_c = 0 \end{cases}$$

Подставляем исходные данные:

$$\begin{cases} \dot{\Phi}_a - \dot{\Phi}_b - \dot{\Phi}_c = 0 \\ \dot{\Phi}_a (4 + j4) + \dot{\Phi}_b (6 - j5) - \dot{\Phi}_c (j4) = 120 \\ -\dot{\Phi}_a (j4) - \dot{\Phi}_b (6 - j5) + \dot{\Phi}_c (6 + j6) = 0 \end{cases}$$

Решив систему, определяем токи в ветвях:

$$\dot{\Phi}_a = 16,681 - j0,544 \text{ А}; \quad \dot{\Phi}_b = 8,581 + j1,793 \text{ А}; \quad \dot{\Phi}_c = 8,1 - j2,337 \text{ А};$$

- цепь без магнитно-связанных ветвей (рис. 2.3):

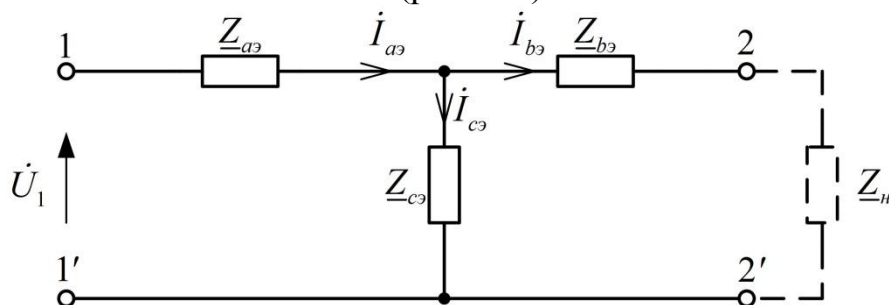


Рис. 2.3

Составляем систему уравнений по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot{\Phi}_{a3} - \dot{\Phi}_{b3} - \dot{\Phi}_{c3} = 0 \\ \dot{\Phi}_{a3} Z_{a3} + \dot{\Phi}_{c3} Z_{c3} = \mathcal{E}_1 \\ \dot{\Phi}_{b3} (Z_{b3} + Z_H) - \dot{\Phi}_{c3} Z_{c3} = 0 \end{cases}$$

Подставляем исходные данные:

$$\begin{cases} \dot{\Phi}_{a3} - \dot{\Phi}_{b3} - \dot{\Phi}_{c3} = 0 \\ \dot{\Phi}_{a3} (4 - j0,018) + \dot{\Phi}_{c3} (6 + j2,056) = 120 \\ \dot{\Phi}_{b3} (6 - j) - \dot{\Phi}_{c3} (6 + j2,056) = 0 \end{cases}$$

Решив систему, определяем токи в ветвях:

$$\dot{\Phi}_{a3} = 16,666 - j0,531 \text{ A}; \quad \dot{\Phi}_{b3} = 8,585 + j1,835 \text{ A}; \quad \dot{\Phi}_{c3} = 8,081 - j2,365 \text{ A}.$$

Из расчетов видно, что токи исходной и эквивалентной схем приблизительно одинаковы, следовательно, переход выполнен верно.

3. Сопротивления крайних режимов

Вычислим сопротивления крайних режимов:

- при $\dot{\mathcal{E}}_2 = 0$: $Z_{10} = Z_{a3} + Z_{c3} = 4 - j0,018 + 6 + j2,056 = 10 + j2,038 \text{ Ом};$

- при $\dot{\mathcal{E}}_2 = 0$:

$$Z_{1k} = Z_{a3} + \frac{Z_{b3} \cdot Z_{c3}}{Z_{b3} + Z_{c3}} = 4 - j0,018 + \frac{(5 - j)(6 + j2,056)}{5 - j + 6 + j2,056} = 6,925 + j0,09 \text{ Ом};$$

- при $\dot{\mathcal{E}}_1 = 0$: $Z_{20} = Z_{b3} + Z_{c3} = 5 - j + 6 + j2,056 = 11 + j1,056 \text{ Ом};$

- при $\dot{\mathcal{E}}_1 = 0$:

$$Z_{2k} = Z_{b3} + \frac{Z_{a3} \cdot Z_{c3}}{Z_{a3} + Z_{c3}} = 5 - j + \frac{(4 - j0,018)(6 + j2,056)}{4 - j0,018 + 6 + j2,056} = 7,467 - j0,691 \text{ Ом}.$$

Определим коэффициент A:

$$A = \sqrt{\frac{Z_{10} Z_{1k}}{Z_{2k} (Z_{10} - Z_{1k})}} = \sqrt{\frac{(10 + j2,038)(6,925 + j0,09)}{(7,467 - j0,691)(10 + j2,038 - 6,925 - j0,09)}} = 1,596 - j0,207;$$

Определяем остальные коэффициенты:

$$C = \frac{A}{Z_{10}} = \frac{1,596 - j0,207}{10 + j2,038} = 0,149 - j0,051 \text{ См};$$

$$B = A Z_{2k} = (1,596 - j0,207)(7,467 - j0,691) = 11,774 - j2,649 \text{ Ом};$$

$$D = \frac{B}{Z_{1k}} = \frac{11,774 - j2,649}{6,925 + j0,09} = 1,695 - j0,405.$$

Коэффициенты приблизительно равны коэффициентам, рассчитанным в п. 1.

4. Вычисление характеристических сопротивлений

Рассчитаем значения характеристических сопротивлений:

$$Z_{c1} = \sqrt{Z_{10} Z_{1k}} = \sqrt{(10 + j2,038)(6,925 + j0,09)} = 8,37 + j0,789 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{c2} = \sqrt{\underline{Z}_{20}\underline{Z}_{2k}} = \sqrt{(11 + j1,056)(7,467 - j0,691)} = 9,103 + j0,016 \text{ Ом.}$$

Составим схему прямого согласованного включения (рис. 2.4) и вычислим по ней входное сопротивление:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{ex1}} &= \underline{Z}_{aэ} + \frac{\underline{Z}_{cэ}(\underline{Z}_{bэ} + \underline{Z}_{c2})}{\underline{Z}_{cэ} + \underline{Z}_{bэ} + \underline{Z}_{c2}} = 4 - j0,018 + \frac{(6 + j2,056)(5 - j + 9,103 + j0,016)}{6 + j2,056 + 5 - j + 9,103 + j0,016} = \\ &= 8,359 + j0,898 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

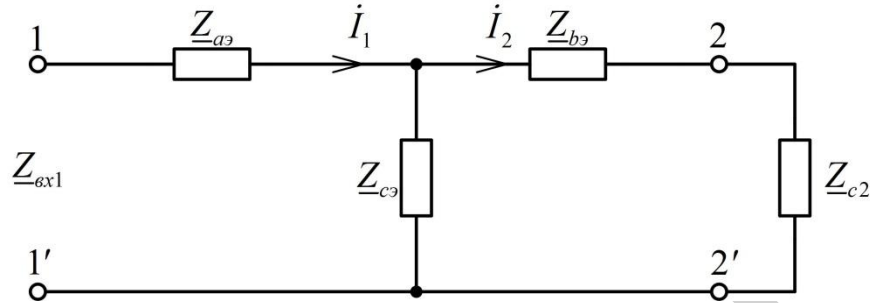


Рис. 2.4

Составим схему обратного согласованного включения (рис. 2.4) и вычислим по ней входное сопротивление:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{ex2}} &= \underline{Z}_{bэ} + \frac{\underline{Z}_{cэ}(\underline{Z}_{aэ} + \underline{Z}_{c1})}{\underline{Z}_{cэ} + \underline{Z}_{aэ} + \underline{Z}_{c1}} = 5 - j + \frac{(6 + j2,056)(7 - j0,018 + 8,37 + j0,789)}{6 + j2,056 + 7 - j0,018 + 8,37 + j0,789} = \\ &= 9,389 + j0,115 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

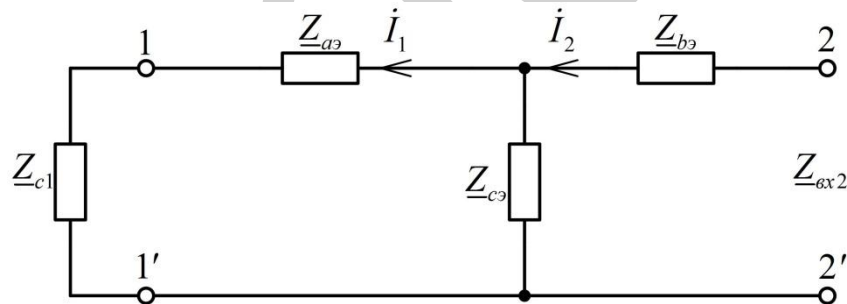


Рис. 2.5

5. Круговая диаграмма и нагрузочные характеристики

5.1. Построение круговой диаграммы

Определим токи короткого замыкания и холостого хода:

$$\underline{\mathcal{I}}_{1k} = \frac{\underline{\mathcal{E}}_1}{\underline{Z}_{1k}} = \frac{120}{6,925 + j0,09} = 17,326 - j0,225 = 17,327e^{-j0,744^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{\mathcal{I}}_{10} = \frac{\underline{\mathcal{E}}_1}{\underline{Z}_{10}} = \frac{120}{10 + j2,038} = 11,521 - j2,348 = 11,758e^{-j11,52^\circ} \text{ А.}$$

Ток $\underline{\mathcal{I}}_2$ при сопротивлении нагрузки $\underline{Z}_н = 1$:

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{I}}_2 &= \underline{\mathcal{I}}_{10} + \frac{\underline{\mathcal{I}}_{1k} - \underline{\mathcal{I}}_{10}}{1 + \frac{\underline{Z}_н}{\underline{Z}_{2k}}} = 11,521 - j2,348 + \frac{17,326 - j0,225 - 11,521 + j2,348}{1 + \frac{1}{7,467 - j0,691}} = \\ &= 16,665 - j0,53 = 16,673e^{-j1,8^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Угол δ : $\delta = \varphi_2 - \varphi_{2k} = 0 + 5,3 = 5,3^\circ$.

Выбираем масштабы:

- для тока I_1 : $m_{I_1} = 2 \text{ A/см}$;
- для напряжения U_1 : $m_{U_1} = 10 \text{ В/см}$.

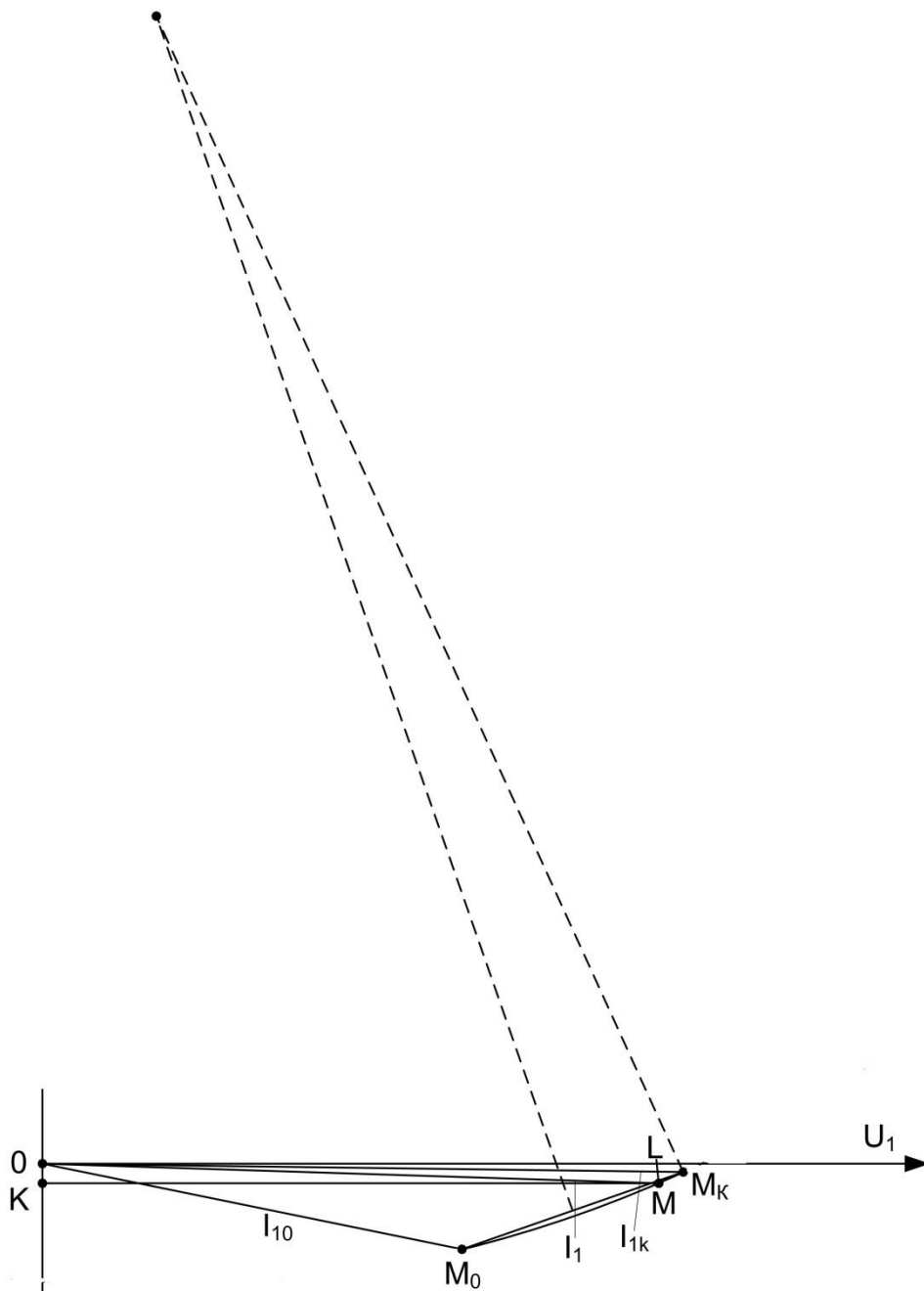


Рис. 2.6

Масштабы и отрезки, соответствующие параметрам четырехполюсника, указаны в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Параметр	Отрезок	Масштаб	Значение
I_1	OM	$m_{I_1} \text{ A/см}$	16,673 А
I_2	M_0M	$ A \cdot m_{I_1} = 3,22 \text{ A/см}$	8,786 А
U_2	MM_K	$ B \cdot m_{I_1} = 24,136 \text{ В/см}$	8,786 В
P_1	MK	$U_1 m_{I_1} = 240 \text{ Вт/см}$	1998,577 Вт
P_2	ML	$U_1 \cos \varphi_2 m_{I_1} = 240 \text{ Вт/см}$	77,2 Вт

Параметр	Отрезок	Масштаб	Значение
S_1	OM	$U_1 m_{I1} = 240 \text{ ВА/см}$	2000,4
S_2	ML	$U_1 m_{I1} = 240 \text{ ВА/см}$	77,2
Q_1	OK	$U_1 m_{I1} = 240 \text{ ВАр/см}$	63,292
Q_2	ML	$U_1 \sin \varphi_2 m_{I1} = 0 \text{ ВАр/см}$	0

5.2. Нагрузочные характеристики

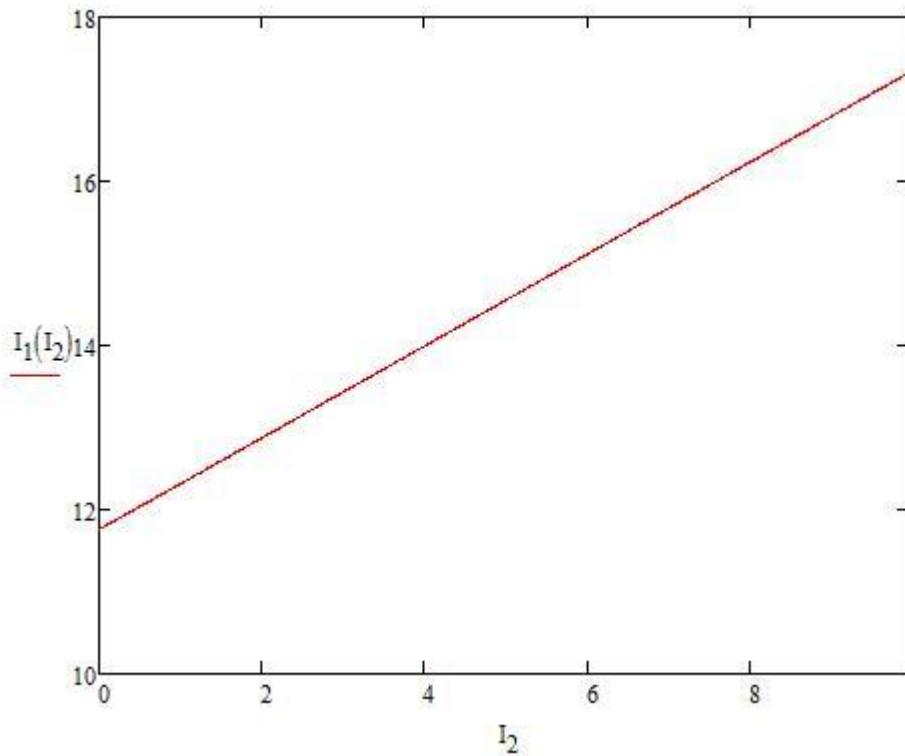


Рис. 2.7

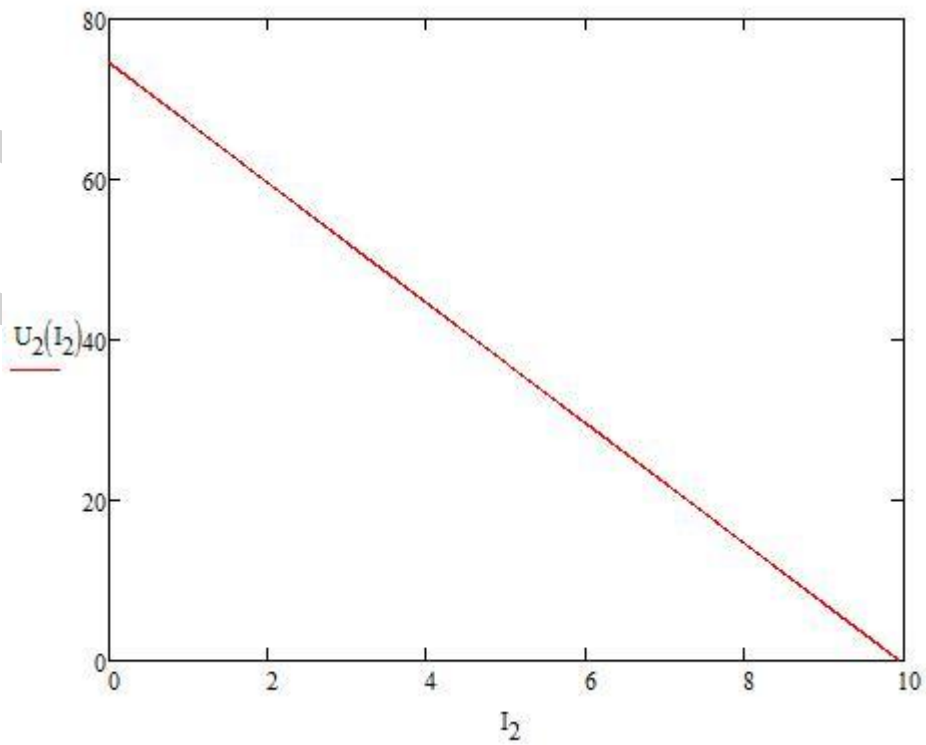


Рис. 2.8

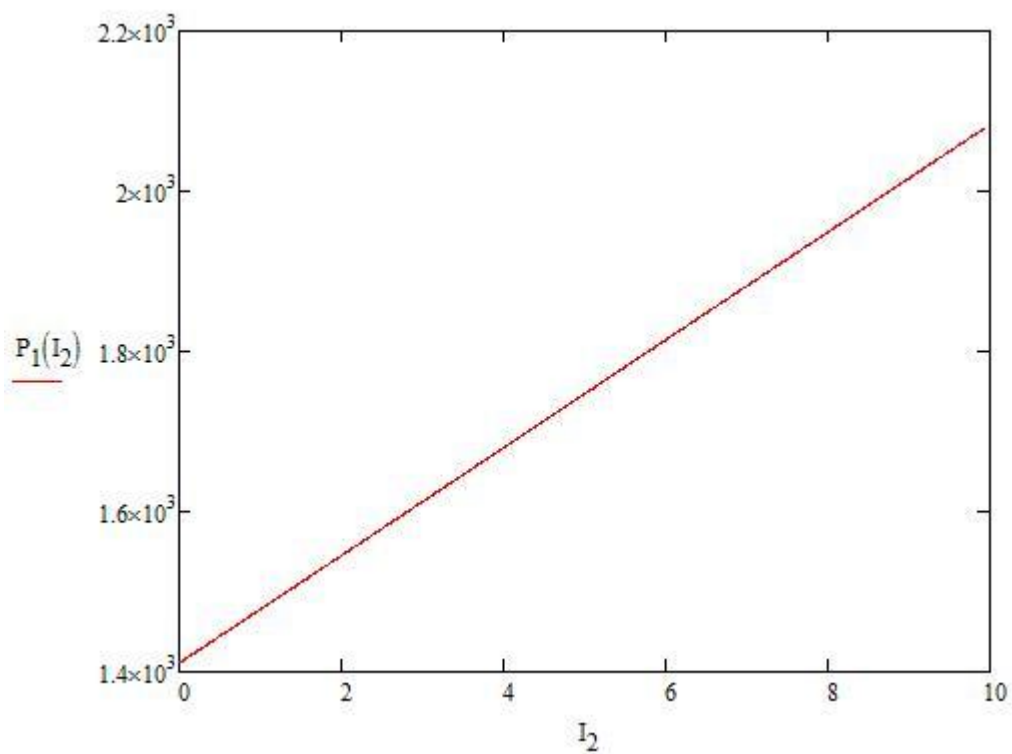


Рис. 2.9

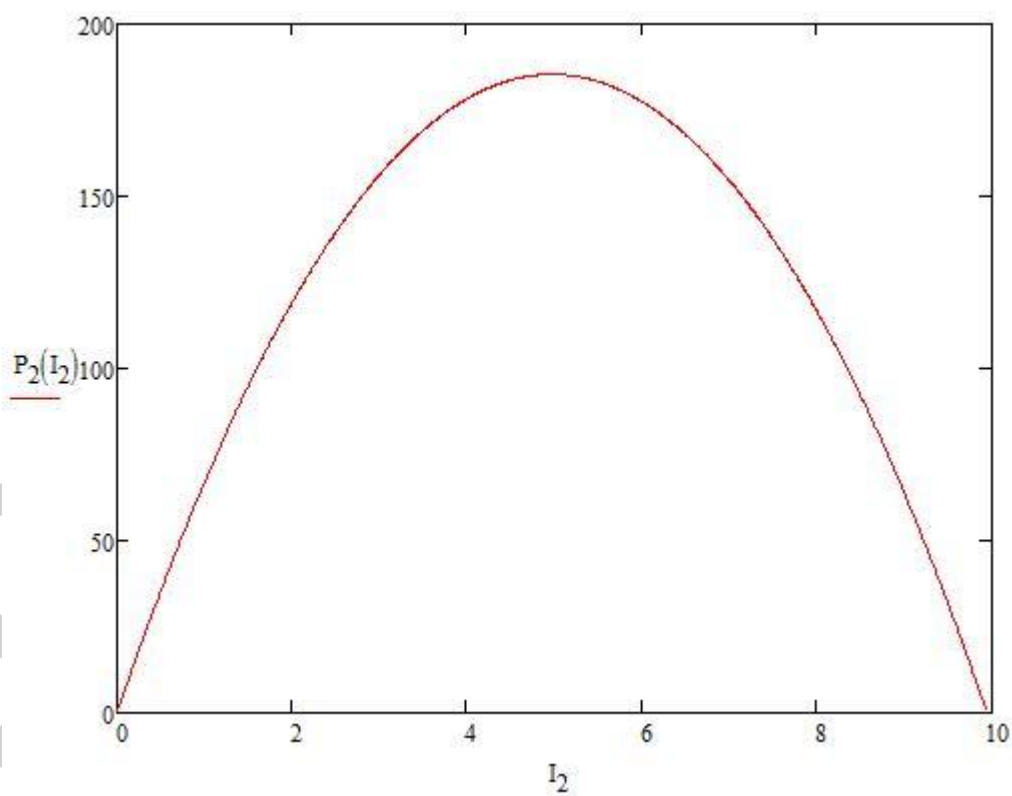


Рис. 2.9

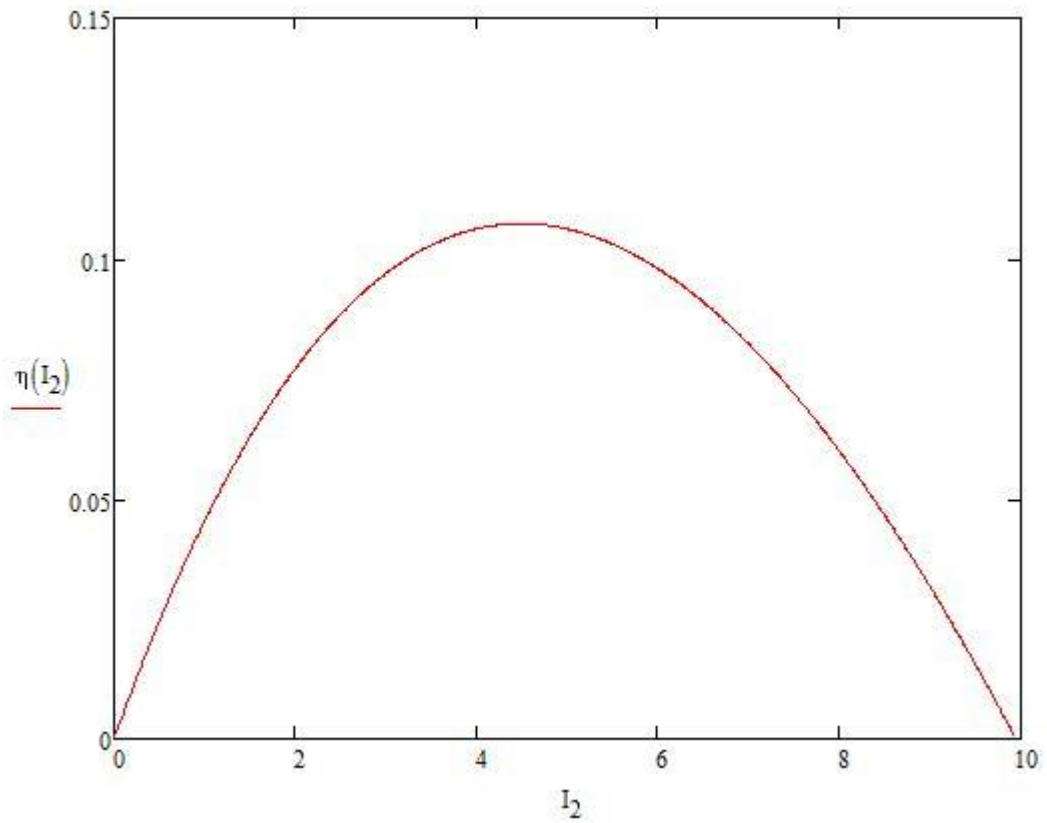


Рис. 2.10

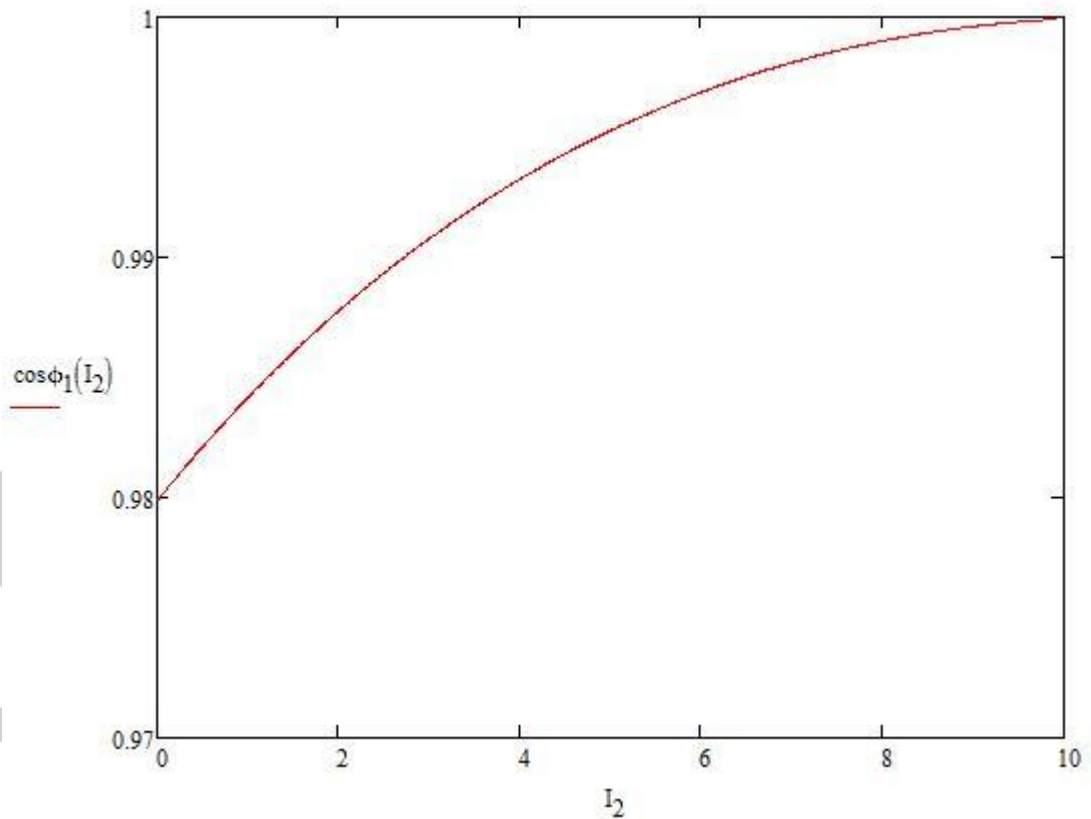


Рис. 2.11

6. Вычисление параметров двух каскадно соединенных четырехполюсников
 При каскадном соединении двух четырехполюсников \underline{A} -матрица вычисляется как произведение \underline{A} -матриц четырехполюсников, составляющих каскад:

$$\underline{A}_\kappa = \begin{pmatrix} 1,596 - j0,207 & 11,774 - j2,649 \\ 0,149 - j0,051 & 1,695 - j0,405 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,596 - j0,207 & 11,774 - j2,649 \\ 0,149 - j0,051 & 1,695 - j0,405 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4,124 - j1,656 & 37,127 - j15,924 \\ 0,459 - j0,259 & 4,328 - j2,368 \end{pmatrix}.$$

$$A_\kappa = 4,124 - j1,656; B_\kappa = 37,127 - j15,924 \text{ Ом};$$

$$C_\kappa = 0,459 - j0,259 \text{ См}; D_\kappa = 4,238 - j2,368.$$

Сопротивления эквивалентного четырехполюсника:

$$\underline{Z}_a = \frac{A_\kappa - 1}{C_\kappa} = \frac{4,124 - j1,656 - 1}{0,459 - j0,259} = 6,707 + j0,176 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_b = \frac{D_\kappa - 1}{C_\kappa} = \frac{4,238 - j2,368 - 1}{0,459 - j0,259} = 7,56 - j0,894 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_c = \frac{1}{C_\kappa} = \frac{1}{0,459 - j0,259} = 1,562 - j0,932 \text{ Ом}.$$

Определяем \underline{Z} -параметры эквивалентного четырехполюсника:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_a + \underline{Z}_c = 6,707 + j0,176 + 1,562 - j0,932 = 8,269 - j0,756 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_c = 1,562 - j0,932 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_b + \underline{Z}_c = 7,56 - j0,894 + 1,562 - j0,932 = 9,122 - j1,826 \text{ Ом}.$$

Составим матрицу \underline{Z} -параметров:

$$\underline{Z}_\kappa = \begin{pmatrix} 8,269 - j0,756 & 1,562 - j0,932 \\ 1,562 - j0,932 & 9,122 - j1,826 \end{pmatrix}$$

Найдем определитель матрицы \underline{Z} -параметров:

$$\Delta_{Z_\kappa} = \begin{vmatrix} 8,269 - j0,756 & 1,562 - j0,932 \\ 1,562 - j0,932 & 9,122 - j1,826 \end{vmatrix} = 72,478 - j19,084.$$

Определяем \underline{Y} -параметры четырехполюсника:

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{Z}_{22}}{\Delta_{Z_\kappa}} = \frac{9,122 - j1,826}{72,478 - j19,084} = 0,124 + j0,007 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = \frac{-\underline{Z}_{12}}{\Delta_{Z_\kappa}} = \frac{-1,562 + j0,932}{72,478 - j19,084} = -0,023 + j0,007 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_{22} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\Delta_{Z_\kappa}} = \frac{8,269 - j0,756}{72,478 - j19,084} = 0,109 + j0,018 \text{ См}.$$

$$\underline{Y}_\kappa = \begin{pmatrix} 0,124 + j0,007 & -0,023 + j0,007 \\ -0,023 + j0,007 & 0,109 + j0,018 \end{pmatrix}$$