На рисунке 1 изображена схема сложной цепи постоянного тока.

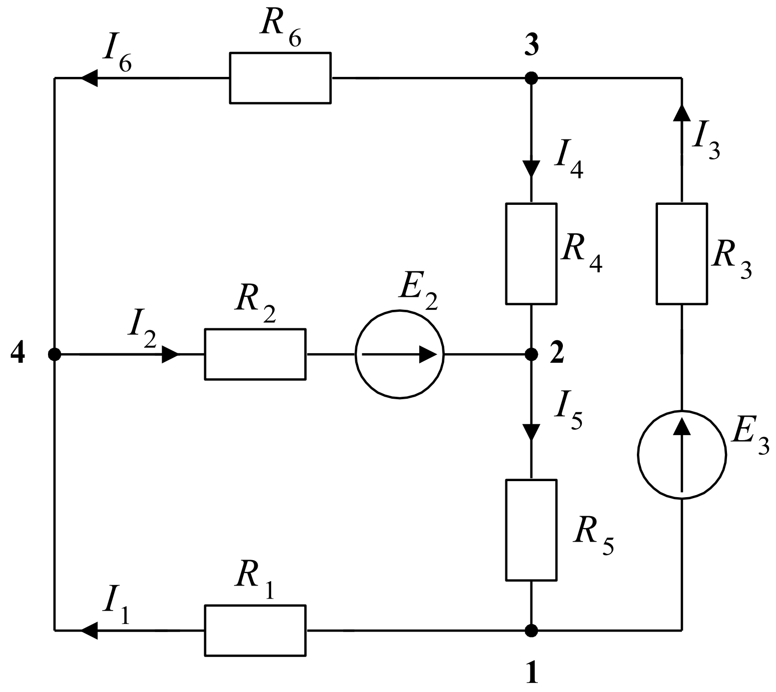

Рис. 1

Заданы следующие значения сопротивлений и ЭДС:

$R_1 = 10$ Ом;	$R_4 = 10$ Ом;	$E_2 = 20$ В;
$R_2 = 15$ Ом;	$R_5 = 5$ Ом ;	$E_3 = 30$ В.
$R_3 = 10$ Ом;	$R_6 = 10$ Ом;	

Требуется:

1. Составить граф схемы.
2. Составить систему уравнений по законам Кирхгофа для своей цепи.
3. Составить систему уравнений методом контурных токов.
4. Составить систему уравнений методом узловых потенциалов (напряжений).
5. Рассчитать токи в ветвях и напряжения на отдельных элементах одним из методов, п.3 и п.4. Составить баланс мощностей.
6. Рассчитать ток в 4-й ветви I_4 методом эквивалентного генератора. Построить внешнюю характеристику эквивалентного генератора $U_г$ (I_4), на которой обозначить рабочую точку.

1. Граф схемы

Заданную схему изобразим в виде графа, в котором ветви представляются отрезками линий; идеальный источник ЭДС учитывается как короткозамкнутая ветвь.

Часть графа, содержащая все узлы, но не содержащая ни одного замкнутого контура, называется деревом. Число ветвей дерева на единицу меньше числа узлов схемы. Для данной схемы выбираем ветви дерева – 2, 4, 5 ветви.

Ветви графа, не входящие в состав дерева, называются хордами. Число хорд равно числу независимых контуров. Хордами будут 1, 3, 6 ветви.

Выбираем положительные направления токов в ветвях. Граф схемы показан на рис. 2 и содержит 4 узла и 6 ветвей.

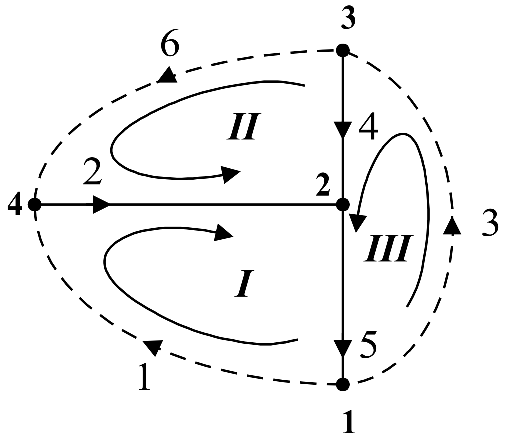

Рис. 2

Выбираем направление положительного обхода независимых контуров, совпадающее с направлением тока хорды.

2. Система уравнений по законам Кирхгофа

По первому закону Кирхгофа всегда составляется уравнений на единицу меньше, чем узлов в схеме:

$$n = q - 1 = 4 - 1 = 3,$$

где $q = 4$ – число узлов схемы.

По второму закону Кирхгофа составляем m уравнений для выбранных независимых контуров:

$$m = p - (q - 1) = 6 - (4 - 1) = 3,$$

где $p = 6$ – число ветвей цепи.

Например, уравнения, составленные по I закону Кирхгофа для 1-го, 2-го и 3-го узлов, имеют вид:

$$I_5 - I_1 - I_3 = 0,$$
$$I_2 + I_4 - I_5 = 0,$$
$$I_3 - I_4 - I_6 = 0.$$

Уравнения по II закону Кирхгофа для 3-х контуров:

$$R_1I_1 + R_2I_2 + R_5I_5 = E_2,$$
$$R_2I_2 - R_4I_4 + R_6I_6 = E_2,$$
$$R_3I_3 + R_4I_4 + R_5I_5 = E_3.$$

Таким образом, получили систему из шести уравнений.

3. Составим систему уравнений по методу контурных токов.

Этот метод заключается в том, что вместо токов в ветвях на основании второго закона Кирхгофа определяются так называемые контурные токи, замыкающиеся в контурах. Число уравнений, записываемых для контурных токов по второму закону Кирхгофа, равно числу независимых контуров.

Зададим направления контурных токов (рис. 3). Направление обхода каждого контура обычно принимается совпадающим с выбранным положительным направлением контурного тока.

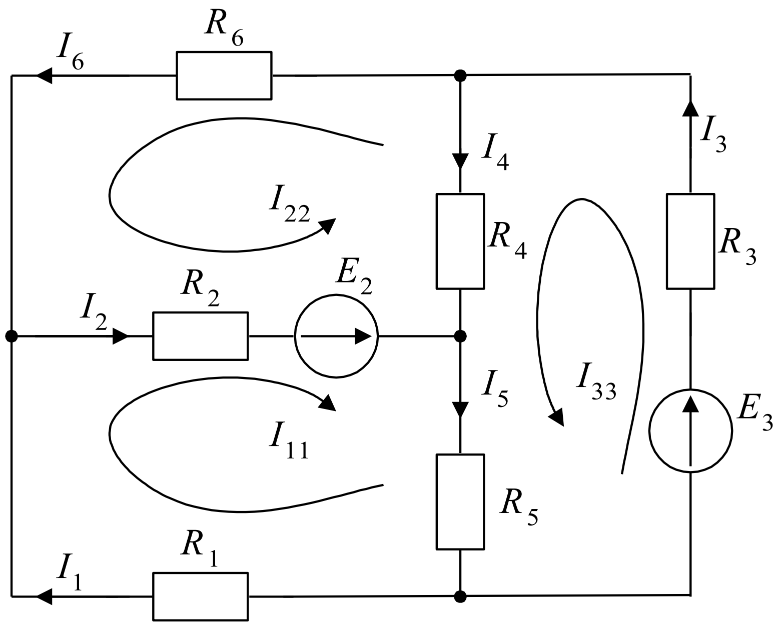

Рис. 3

Запишем уравнение для первого контура:

$$(R_1 + R_2 + R_5)I_{11} + R_2I_{22} + R_5I_{33} = E_2,$$

или

$$R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} = E_{11},$$

где $E_{11} = E_2$ – контурная ЭДС 1-го контура, т. е. алгебраическая сумма ЭДС, действующих в данном контуре; ЭДС, совпадающие по направлению с направлением обхода, берутся со знаком плюс, а направленные встречно – со знаком минус;

$R_{11} = (R_1 + R_2 + R_5)$ – собственное сопротивление 1-го контура, равное сумме сопротивлений, входящих в контур;

$R_{12} = R_2$ – общее сопротивление 1-го и 2-го контуров; это сумма сопротивлений в общей для 1-го и 2-го контуров ветви;

$R_{13} = R_5$ – общее сопротивление 1-го и 3-го контуров.

Общие сопротивления войдут в уравнения со знаком «–», когда контурные токи по общей ветви направлены встречно; если контурные токи направлены согласно, в уравнениях общие сопротивления будут со знаком «+».

Для двух других контуров уравнения, записанные по методу контурных токов, будут иметь вид:

$$R_2I_{11} + (R_2 + R_4 + R_6)I_{22} - R_4I_{33} = E_2,$$
$$R_5I_{11} - R_4I_{22} + (R_3 + R_4 + R_5)I_{33} = E_3.$$

Или в общем виде система будет иметь вид:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} = E_{11}, \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} = E_{22}, \\ R_{31}I_{11} + R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} = E_{33}. \end{cases}$$

4. Составим систему уравнений по методу узловых потенциалов.

Метод узловых потенциалов заключается в том, что на основании первого закона Кирхгофа определяются потенциалы в узлах электрической цепи относительно некоторого базисного узла. Эти разности потенциалов называются узловыми напряжениями, причем положительное направление их указывается стрелкой от рассматриваемого узла к базисному.

Число уравнений, составленных по методу узловых потенциалов, равно числу узлов без единицы (q – 1).

Если в рассматриваемой схеме узел 4 мысленно заземлить, т. е. принять $\varphi_4 = 0$, то необходимо определить потенциалы трех узлов: φ_1, φ_2, φ_3.

Запишем уравнение для 1-го узла (рис. 1.19):

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right)\varphi_1 - \frac{1}{R_5}\varphi_2 - \frac{1}{R_3}\varphi_3 = -\frac{E_3}{R_3},$$

или

$$G_{11}\varphi_1 + G_{12}\varphi_2 + G_{13}\varphi_3 = J_{11},$$

где $J_{11} = -\dfrac{E_3}{R_3} = -E_3G_3$ – узловой ток узла 1, равный сумме произведений ЭДС ветвей, подходящих к 1-му узлу, и проводимостей этих ветвей. При этом член суммы записывается со знаком «+», если соответствующая ЭДС направлена к 1-му узлу, в противном случае ставится знак «–». Если в подходящих к 1-му узлу ветвях содержатся источники тока, то знаки токов источников токов, входящих в узловой ток простыми слагаемыми, определяются аналогично;

$G_{11} = G_1 + G_3 + G_5 = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_5}$ – собственная проводимость 1-го узла, равная сумме проводимостей ветвей, сходящихся в узле 1;

$G_{12} = -G_5 = -\dfrac{1}{R_5}$ – общая проводимость между узлами 1 и 2, т. е. сумма проводимостей ветвей, соединяющих эти узлы;

$G_{13} = -G_3 = -\dfrac{1}{R_3}$ – общая проводимость между узлами 1 и 3.

Общие проводимости между узлами берутся со знаком «–».

Для 2-го и 3-го узлов уравнения будут иметь вид:

$$-\frac{1}{R_5}\varphi_1+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)\varphi_2-\frac{1}{R_4}\varphi_3=\frac{E_2}{R_2},$$
$$-\frac{1}{R_3}\varphi_1-\frac{1}{R_4}\varphi_2+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6}\right)\varphi_3=\frac{E_3}{R_3}.$$

Или в общем виде система будет иметь вид:

$$\begin{cases} G_{11}\varphi_1+G_{12}\varphi_2+G_{13}\varphi_3=J_{11}, \\ G_{21}\varphi_1+G_{22}\varphi_2+G_{23}\varphi_3=J_{22}, \\ G_{31}\varphi_1+G_{32}\varphi_2+G_{33}\varphi_3=J_{33}. \end{cases}$$

5. Расчет токов в ветвях и напряжения на отдельных элементах одним из методов

5.1 Расчет цепи методом контурных токов

Подставляя численные значения, определим собственные и общие сопротивления контуров.

$R_{11}=R_1+R_2+R_5=10+15+5=30$ Ом,
$R_{22}=R_2+R_4+R_6=15+10+10=35$ Ом,
$R_{33}=R_3+R_4+R_5=10+10+5=25$ Ом,
$R_{12}=R_{21}=R_2=15$ Ом,
$R_{13}=R_{31}=R_5=5$ Ом,
$R_{23}=R_{32}=-R_4=-10$ Ом.

Система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} 30I_{11}+15I_{22}+5I_{33}=20, \\ 15I_{11}+35I_{22}-10I_{33}=20, \\ 5I_{11}-10I_{22}+25I_{33}=30. \end{cases}$$

Решив данную систему уравнений, получаем значения контурных токов:

$I_{11}=-0{,}18$ А;
$I_{22}=1{,}13$ А;
$I_{33}=1{,}69$ А.

Выразим токи всех ветвей через найденные значения контурных токов I_{11}, I_{22}, I_{33}:
$I_1=I_{11}=-0{,}18$ А;
$I_2=I_{11}+I_{22}=-0{,}18+1{,}13=0{,}95$ А;
$I_3=I_{33}=1{,}69$ А;
$I_4=I_{33}-I_{22}=1{,}69-1{,}13=0{,}56$ А;
$I_5=I_{11}+I_{33}=-0{,}18+1{,}69=1{,}51$ А;
$I_6=I_{22}=1{,}13$ А.

Найдем напряжения на отдельных элементах:

$U_1=R_1I_1=10\cdot0{,}18=1{,}8$ В;
$U_2=R_2I_2=15\cdot0{,}951=14{,}27$ В;
$U_3=R_3I_3=10\cdot1{,}69=16{,}89$ В;
$U_4=R_4I_4=10\cdot0{,}56=5{,}57$ В;
$U_5=R_5I_5=5\cdot1{,}51=7{,}54$ В;
$U_6=R_6I_6=10\cdot1{,}13=11{,}31$ В.

Для проверки правильности расчетов составим баланс мощностей.

Суммарная мощность источников

$P_и=E_2\cdot I_2+E_3\cdot I_3=20\cdot0{,}95+30\cdot1{,}69=19{,}02+50{,}67=69{,}69$ Вт.

Суммарная мощность потребителей

$P_п = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 + I_6^2 \cdot R_6 = 0{,}18^2 \cdot 10 + 0{,}95^2 \cdot 15 + 1{,}69^2 \cdot 10 + 0{,}56^2 \cdot 10 + 1{,}51^2 \cdot 5 + 1{,}13^2 \cdot 10 = 69{,}68$ Вт.

Баланс мощностей должен выполняться с точностью ± 5%.

$$\frac{P_и - P_п}{P_п} \cdot 100\% = \frac{69{,}69 - 69{,}68}{69{,}68} \cdot 100\% = 0{,}014\%,$$

что подтверждает правильность расчета токов.

5.2 Расчет цепи методом узловых потенциалов

Подставляя численные значения, определим собственные и общие проводимости узлов.

$$G_{11} = G_1 + G_3 + G_5 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}4 \text{ См};$$

$$G_{22} = G_2 + G_4 + G_5 = \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = 0{,}067 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}37 \text{ См};$$

$$G_{33} = G_3 + G_4 + G_6 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}3 \text{ См};$$

$$G_{12} = G_{21} = - G_5 = -\frac{1}{5} = - 0{,}2 \text{ См};$$

$$G_{13} = G_{31} = - G_3 = -\frac{1}{10} = - 0{,}1 \text{ См};$$

$$G_{23} = G_{32} = - G_4 = -\frac{1}{10} = - 0{,}1 \text{ См}.$$

Найдем значения узловых токов.

$$J_{11} = -\frac{E_3}{R_3} = -\frac{30}{10} = - 3 \text{ А};$$

$$J_{22} = \frac{E_2}{R_2} = \frac{20}{15} = 1{,}33 \text{ А};$$

$$J_{33} = \frac{E_3}{R_3} = \frac{30}{10} = 3\text{А}.$$

Система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} 0{,}4\varphi_1 - 0{,}2\varphi_2 - 0{,}1\varphi_3 = -3; \\ -0{,}2\varphi_1 + 0{,}37\varphi_2 - 0{,}1\varphi_3 = 1{,}33; \\ -0{,}1\varphi_1 - 0{,}1\varphi_2 + 0{,}3\varphi_3 = 3. \end{cases}$$

Решив данную систему уравнений с помощью программы Complex Matrix или электронных таблиц Excel, получаем значения потенциалов в узлах:

$\varphi_1 = - 1{,}82$ В;

$\varphi_2 = 5{,}71$ В;

$\varphi_3 = 11{,}3$ В.

После решения системы относительно потенциалов определяют токи в ветвях по закону Ома для участка цепи, содержащего ЭДС.

$$I_1 = \frac{\varphi_1}{R_1} = \frac{-1{,}82}{10} = -\,0{,}18\text{ А;}$$

$$I_2 = \frac{-\varphi_2 + E_2}{R_2} = \frac{-5{,}71 + 20}{15} = 0{,}95\text{ А;}$$

$$I_3 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + E_3}{R_3} = \frac{-1{,}82 - 11{,}3 + 30}{10} = 1{,}69\text{ А;}$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R_4} = \frac{11{,}3 - 5{,}71}{10} = 0{,}56\text{ А;}$$

$$I_5 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_5} = \frac{5{,}71 - (-1{,}82)}{5} = 1{,}51\text{ А;}$$

$$I_6 = \frac{\varphi_3}{R_6} = \frac{11{,}296}{10} = 1{,}13\text{ А.}$$

Следовательно, расчет токов различными методами дает практически одинаковые их значения.

6. Расчет тока в ветви, содержащей сопротивление R_4, методом эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора позволяет достаточно просто определить ток в одной ветви сложной линейной схемы, не находя токи в остальных ветвях.

По отношению к выделенной ветви *mn* с сопротивлением R_n вся остальная часть сложной цепи, содержащая источники ЭДС, может быть заменена одним эквивалентным генератором с ЭДС E_0 и внутренним сопротивлением R_0.

Расчет осуществляется в два этапа:

1. Любым из известных методов расчета линейных электрических цепей определяют напряжение U_{mn} на зажимах *mn* активного двухполюсника при разомкнутой исследуемой ветви.
2. При разомкнутой исследуемой ветви определяется входное сопротивление активного двухполюсника, заменяемого при этом пассивным. Данная замена осуществляется путем устранения из структуры активного двухполюсника всех источников энергии, но при сохранении на их месте их собственных (внутренних) сопротивлений. В случае идеальных источников это соответствует закорачиванию всех источников ЭДС и размыканию всех ветвей с источниками тока.

Для расчета ЭДС эквивалентного источника напряжения необходимо разомкнуть ветвь с сопротивление R_4 и произвести расчет оставшейся цепи (рис. 4, *а*).

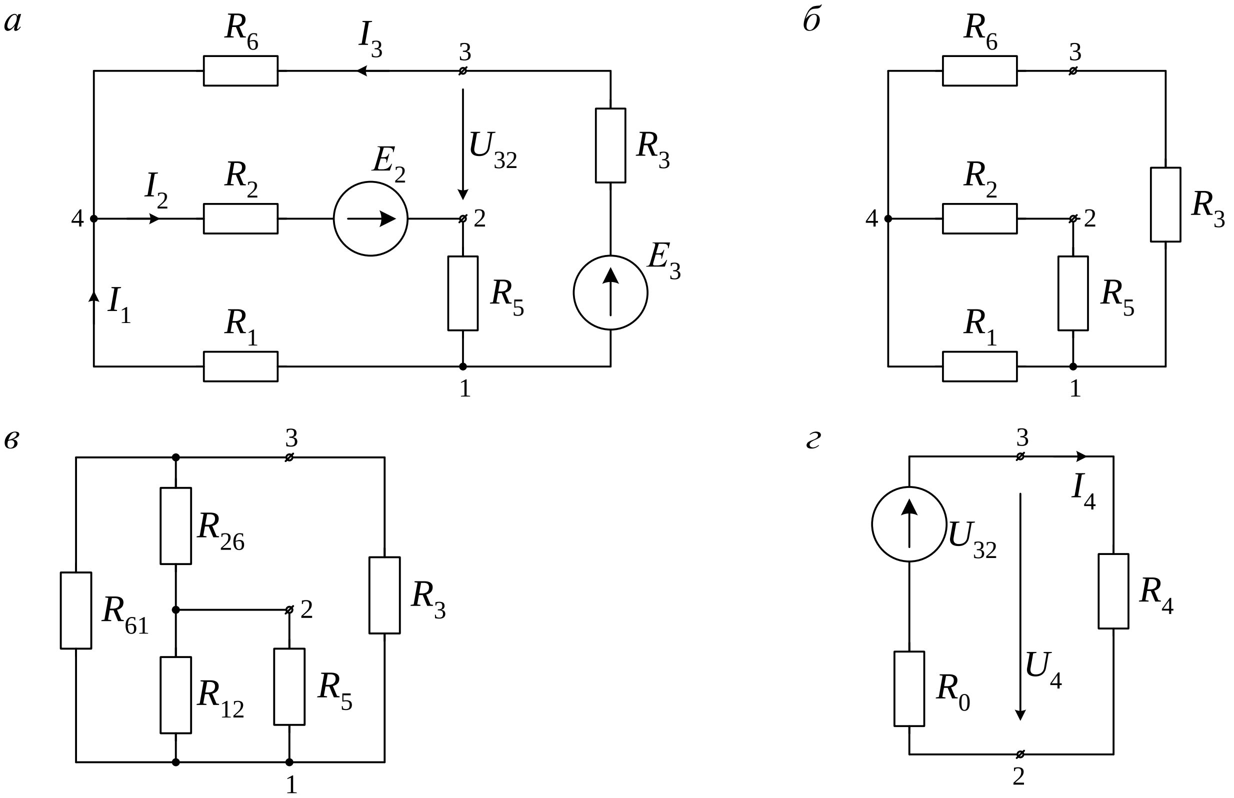

Рис. 4

Разность потенциалов между точками 3 и 2 дает величину ЭДС эквивалентного источника E_0.

$$E_0 = U_{32} = \varphi_3 - \varphi_2 = E_3 - R_5 I_2 - R_3 I_3.$$

Токи в ветвях I_1, I_2, I_3 найдем методом контурных токов. Система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_5)I_1 + (R_2 + R_5)I_3 = E_2, \\ (R_2 + R_5)I_1 + (R_2 + R_3 + R_5 + R_6)I_3 = E_2 + E_3. \end{cases} \qquad \begin{cases} 30I_1 + 20I_3 = 20, \\ 20I_1 + 40I_3 = 50. \end{cases}$$

Решив ее, получаем

$$I_1 = -\,0{,}25 \text{ А};$$
$$I_3 = 1{,}36 \text{ А};$$
$$I_2 = I_1 + I_3 = 1{,}13 \text{ А}.$$

Тогда

$$E_0 = E_3 - R_5 I_2 - R_3 I_3 = 30 - 5\cdot 1{,}13 - 10\cdot 1{,}38 = 10{,}63 \text{ В}.$$

Внутреннее сопротивление источника R_0 определяется как входное сопротивление цепи (без R_4) со стороны узлов 2 и 3 при замкнутых накоротко источниках E_2 и E_3 (рис. 1.22, б). Для расчета сопротивления R_0 целесообразно преобразовать звезду сопротивлений R_1, R_2, R_6, соединенных в узел 4, в эквивалентное соединение треугольником R_{12}, R_{26}, R_{61} (рис. 1.22, в).

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_6 + R_2 R_6}{R_6} = \frac{10\cdot 15 + 10\cdot 10 + 15\cdot 10}{10} = 40 \text{ Ом};$$

$$R_{26} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_6 + R_2 R_6}{R_1} = \frac{10\cdot 15 + 10\cdot 10 + 15\cdot 10}{10} = 40 \text{ Ом};$$

$$R_{61} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_6 + R_2 R_6}{R_2} = \frac{10\cdot 15 + 10\cdot 10 + 15\cdot 10}{15} = 26{,}67 \text{ Ом}.$$

Сопротивления R_5 и R_{12} соединены между собой параллельно, также как и сопротивления R_3 и R_{61}. Между собой они соединены последовательно, а весь этот участок цепи соединен параллельно с сопротивлением R_{26}.

Тогда сопротивление R_0

$$R_0 = \frac{\left(\dfrac{R_5 \cdot R_{12}}{R_5 + R_{12}} + \dfrac{R_3 \cdot R_{61}}{R_3 + R_{61}}\right) \cdot R_{26}}{\dfrac{R_5 \cdot R_{12}}{R_5 + R_{12}} + \dfrac{R_3 \cdot R_{61}}{R_3 + R_{61}} + R_{26}} = \frac{\left(\dfrac{5 \cdot 40}{5 + 40} + \dfrac{10 \cdot 26{,}67}{10 + 26{,}67}\right) \cdot 40}{\dfrac{5 \cdot 40}{5 + 40} + \dfrac{10 \cdot 26{,}67}{10 + 26{,}67} + 40} = 9{,}0 \text{ Ом.}$$

Для определения тока I_4 окончательно получаем схему (рис. 4, г), из которой

$$I_4 = \frac{E_0}{R_0 + R_4} = \frac{10{,}625}{9{,}063 + 10} = 0{,}5 \text{ А.}$$

Полученное значение тока I_4 должно совпадать со значением этого тока, рассчитанным другим методом.

Построение графической зависимости $U_г(I)$ для 4-й ветви.

График зависимости $U_г(I)$ представляет собой внешнюю характеристику эквивалентного генератора (рис. 5). Аналитически эта зависимость выражается формулой $U_г = E_0 – I_4R_0$.

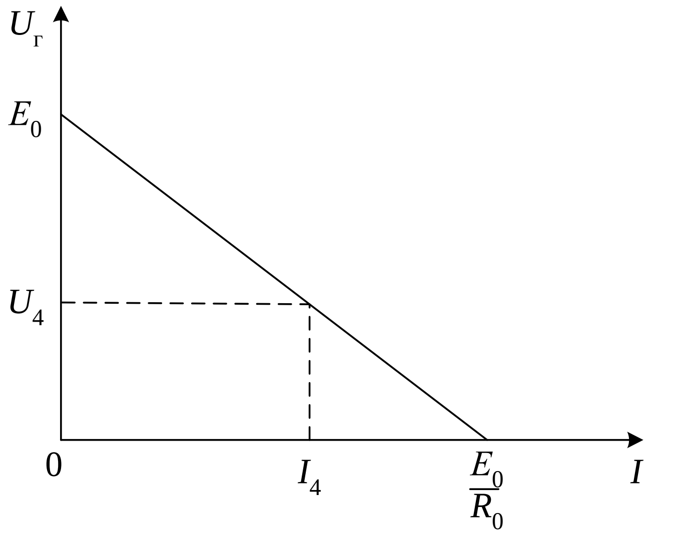

Рис. 5

Так как зависимость имеет линейный характер, то ее можно построить по двум точкам. Первая соответствует режиму холостого хода $I_4 = 0$, $U_г = E_0$; вторая – режиму короткого замыкания $U_г = 0$, $I_4 = \dfrac{E_0}{R_0}$.

Рабочая точка соответствует току I_4 и напряжению U_4.